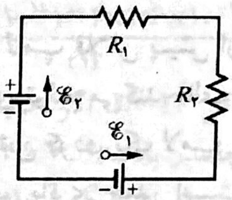
فصل

۲۳

مدارها

بخش ۲۳-۶ اختلاف پتانسیل میان دو نقطه

●۱- SSM WWW در شکل ۲۳-۲۵، emf باتری‌های آرمانی برابر با $\mathscr{E}_1 = ۱۲\text{V}$ و $\mathscr{E}_2 = ۶/۰\,\text{V}$ و مقاومت‌ها برابر $R_1 = ۴/۰\,\Omega$ و $R_2 = ۸/۰\,\Omega$ است. (الف) جریان، آهنگ اتلاف در (ب) مقاومت ۱ و (پ) مقاومت ۲ و آهنگ تبدیل انرژی در (ت) باتری ۱ و (ث) باتری ۲ چقدر است؟ آیا انرژی توسط (ج) باتری ۱ و (چ) باتری ۲، تولید می‌شود یا گرفته می‌شود؟



شکل ۲۳-۲۵ مسئلهٔ ۱

حل: (الف) جریان در حلقه را پادساعتگرد فرض می‌کنیم (انتظار داریم صحیح باشد چون $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ است) و قانون حلقه را می‌نویسیم، داریم:

$$\varepsilon_1 - iR_2 - iR_1 - \varepsilon_2 = ۰$$

$$i = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{۱۲ - ۶}{۴ + ۸} = ۰/۵\text{A}$$

علامت مثبت نشان‌دهنده این است که جهت جریان را درست انتخاب کرده‌ایم.

(ب) توان اتلاف شده در R_1 برابر است با

$$P_1 = R_1 i^2 = (۴)(۰/۵)^2 = ۱\,\text{W}$$

(پ) توان تلف شده در R_2 برابر است با

$$P_2 = R_2 i^2 = (۸)(۰/۵)^2 = ۲\,\text{W}$$

(ت) انرژی با آهنگ $P_1 = \varepsilon_1 i$ توسط باتری ۱ تهیه می‌شود.

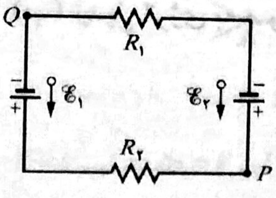
$$P_1 = (۱۲)(۰/۵) = ۶\,\text{W}$$

(ث) $P_2 = \varepsilon_2 i = (۶)(۰/۵) = ۳\,\text{W}$

(ج) جهت جریان در باتری ۱، همسو با emf است لذا این باتری برای مدار انرژی تهیه می‌کند و تخلیه می‌شود.

(چ) جهت جریان در باتری ۲، در خلاف جهت emf است لذا این باتری انرژی را جذب می‌کند و باردار می‌شود.

●۲- در شکل ۲۳-۲۶، emf باتری‌های آرمانی برابر با $\mathscr{E}_1 = ۱۵۰\,\text{V}$ و $\mathscr{E}_2 = ۵۰\,\text{V}$ و مقاومت‌ها $R_1 = ۳/۰\,\Omega$ و $R_2 = ۲/۰\,\Omega$ است. اگر پتانسیل در نقطهٔ P، ۱۰۰V تعریف شود، پتانسیل در نقطهٔ Q چقدر است؟



شکل ۲۳-۲۶ مسئلهٔ ۲

حل: جریان را در مدار پادساعتگرد می‌گیریم و آن را بـه دسـت می‌آوریم.

$$-\varepsilon_2 - iR_1 + \varepsilon_1 - iR_2 = 0$$

$$i = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{150 - 50}{3 + 2} = 20\,\text{A}$$

با مقایسه نیروهـای محرکـه $(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$ انتظـار داشـتیم جهـت انتخابی درست باشد که پاسخ مثبت i آن را تأییـد مـی‌کنـد. در جهت جریان از نقطه p به طرف Q می‌رویم.

$$V_p - \varepsilon_2 - iR_1 = V_Q$$

$$V_Q = 100 - 50 - (20)(3) = -10\,\text{V}$$

●۳- ILW باتری اتـومبیلی بـا emf برابـر بـا ۱۲V و مقاومـت درونی برابر با $0.040\,\Omega$ با جریان ۵۰A باردار می‌شود. (الف) اختلاف پتانسیل V دو سر پایانه‌ها چقدر است؟ (ب) آهنگ P_1 اتلاف انرژی در داخل باتری و (پ) آهنگ P_{emf} تبدیل انـرژی به شکل شیمیایی، چقدر است؟ هرگاه این باتری برای اسـتارت اتومبیل با جریان ۵۰A مورد استفاده قرار گیرد، (ث) V و (ج) P_r چقدر است؟

حل: (الف) $V = \varepsilon + ri = 12 + (\%4)(50) = 14\,\text{V}$

(ب) $P_r = ri^2 = (\%4)(50)^2 = 100\,\text{W}$

(پ) $P_{emf} = \varepsilon i = (12)(50) = 600\,\text{W}$

(ت) $V = \varepsilon - ri = 12 - (\%4)(50) = 10\,\text{V}$

(ث) $P_r = ri^2 = (\%4)(50)^2 = 100\,\text{W}$

که همان مقدار قبلی است.

●۴- GO شکل ۲۳-۲۷ مداری شـامل چهـار مقاومـت را نـشان می‌دهد که به مدار بزرگتری وصل شده است. نمودار زیر مـدار پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب تـابعی از مکـان x در طـول شاخهٔ پایینی مدار از طریق مقاومت ۴ نـشان مـی‌دهـد. نمـودار بالای مدار پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب مکان x در طـول شاخه بالایی مدار از طریـق مقاومـت‌هـای ۱، ۲ و ۳ بـه دسـت می‌دهد، اختلاف پتانـسیل‌هـا عبـارت‌انـد از $\Delta V_B = 2.00\,\text{V}$ و $\Delta V_C = 5.00\,\text{V}$. مقاومت ۳ برابـر بـا $200\,\Omega$ اسـت. مقاومـت (الف) ۱ و (ب) ۲، چقدر است؟

شکل ۲۳-۲۷ مسئلهٔ ۴

حل: (الف) و (ب) جریان در شاخه بالا را در نظر می‌گیریم.

$$i_1 = i_2 = i_3$$

$$\Delta V_1 = R_1 i_1 = 2\,\text{V} \qquad \Delta V_2 = R_2 i_2 = 5V$$

$$\Delta V_3 = 12 - (2 + 5) = 5\,\text{V}$$

$$\Delta V_3 = R_3 i_3 = 5\,\text{V} \Rightarrow i_3 = \frac{5}{200} = 2.5\times10^{-2}\,\text{A}$$

$$R_1 = \frac{2}{(2.5\times10^{-2})} = 80\,\Omega \quad R_2 = \frac{5}{(2.5\times10^{-2})} = 200\,\Omega$$

●۵- یک جریان ۵/۰ آمپری به وسـیلهٔ یـک بـاتری بـا قابلیـت باردارشدن دوباره بـا emf برابـر بـا ۶/۰V در مـدت ۶min در مداری برقرار می‌شود. انـرژی شـیمیایی بـاتری چقـدر کـاهش می‌یابد؟

حل: $W = Pt = \varepsilon it = (6)(5)(6)(60) = 10800\,\text{J}$

●۶- باتری استاندارد لامپ فلاش پـیش از آنکـه از کـار بیفتـد تقریباً ۲/۰W.h انرژی تولید می‌کند. (الف) اگر قیمت بـاتری ۸ سنت باشد، هزینهٔ روشن کردن یک لامپ ۱۰۰ واتی بـه مـدت ۸/۰h با استفاده از این باتری چقدر اسـت؟ (ب) هزینـهٔ تـوان فراهم شده به وسیلهٔ شرکت خدمات برق به ازای ۶ سنت بـرای هر کیلووات ساعت چقدر است؟

حل: (الف) $W = Pt = (100)(8) = 800\,\text{W}\cdot\text{h}$

تعداد $N = \frac{W}{2} = 400$ عدد باتری مورد نیاز است و با توجه بـه هزینه هر باتری خواهیم داشت

هزینه کل $= (400)(0.8) = 320\,\$$

(ب) هزینه توان فراهم شده برحسب کیلـو وات سـاعت برابـر است با

$$W' = (100)(8) = 800\,\text{W}\cdot\text{h} = 0.8\,\text{kW}\cdot\text{h}$$

هزینه $= (0.8)(\%6) = \%4.8\,\$$

●۷- سیمی با مقاومت $5.0\,\Omega$ به یک بـاتری بـا emf برابـر بـا ۲/۰V و مقاومت درونی $1.0\,\Omega$ وصـل شـده اسـت. در مـدت ۲/۰min ، (الف) چه مقدار انرژی شیمیایی به الکتریکی تبـدیل می‌شود؟ (ب) چه مقدار انرژی بـه صـورت انـرژی گرمـایی در سیم تلف می‌شود و (پ) چه مقدار انرژی به صـورت گرمـا در باتری تلف می‌شود؟

حل: (الف) $W = Pt = \frac{\varepsilon^2}{R+r}t = \frac{(2)^2}{5+1}(120) = 80\,\text{J}$

(ب) $i = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{2}{5+1} = 0.33\,\text{A}$

اتلاف انرژی در سیم برابر است با

$$W_R = Pt = Ri^2t = (5)(0.33)^2(120) = 65.3\,\text{J}$$

(پ) تبدیل انرژی به صورت گرمایی در باتری برابر است با

$$W_b = W - W_R = 80 - 65.3 = 14.7\,\text{J}$$

●۸- بار اولیهٔ یک باتری اتومبیل ۱۲/۰ ولتی ۱۲۰ A.h است. با فرض اینکه پتانسیل دو سر پایانه‌ها تا زمان تخلیهٔ کامل باتری ثابت بماند، باتری چند ساعت انرژی با آهنگ ۱۰۰ W می‌تواند تحویل دهد؟

حل: $P = Vi \Rightarrow 100 = (12)i \Rightarrow i = 8.33\,A$

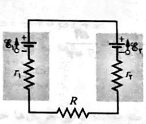
$$q = it \Rightarrow 120 = (8.33)t \Rightarrow t = 14.4\,\text{h}$$

●۹- (الف) چقدر کار برحسب الکترون ولت باید انجام گیـرد تا باتری آرمانی با emf برابـر بـا ۱۲/۰V الکترونـی را از پایانـهٔ مثبت باتری به پایانهٔ منفی آن از طریق باتری انتقال دهـد؟ (ب) اگر در هر ثانیه 3.40×10^{18} الکترون عبـور کنـد، تـوان بـاتری برحسب وات چقدر است؟

حل: (الف) $W = eV = (1)(12) = 12\,eV$

$$P = \frac{nW}{t} = \frac{(3.14\times10^{18})(12\times1.6\times10^{-19})}{(1)} = 6.53\,\text{W}$$

●●۱۰- (الف) در شکل ۲۳-۲۸، اگر جریان در مـدار ۱/۰mA باشد مقدار R بایـد چقـدر باشـد؟ $\mathscr{E}_1 = 2.0\,\text{V}$ ، $\mathscr{E}_2 = 3.0\,\text{V}$ و $r_1 = r_2 = 3.0\,\Omega$ است. (ب) آهنگ ایجاد انرژی گرمـایی در R چقدر است؟



شکل ۲۳-۲۸ مسئلهٔ ۱۰

حـل: (الـف) چـون $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ اسـت انتظـار داریـم جریـان پادساعتگرد باشد که همین جهت را انتخاب کرده و قاعدهٔ حلقه را می‌نویسیم.

$$-\varepsilon_1 - ir_1 - iR - ir_2 + \varepsilon_2 = 0$$

$$-2 - (1\times10^{-3})(3) - (1\times10^{-3})R - (1\times10^{-3})(3) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow R = 994\,\Omega$$

(ب) $P = Ri^2 = (994)(1\times10^{-3})^2 = 9.94\times10^{-4}\,\text{W}$

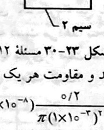
●●۱۱- SSM در شـکل ۲۳-۲۹ بخـش AB از مـدار، وقتـی جریان $i = 1.0\,\text{A}$ در جهـت نـشان داده شـده از آن مـی‌گـذرد، انرژی را با آهنگ ۵۰ W جذب می‌کنـد. مقاومـت $R = 2.0\,\Omega$ است. (الف) اختلاف پتانسیل میان A و B چقـدر اسـت؟ منبـع emf نیروی محرکهٔ الکتریکـی X مقاومـت درونـی نـدارد. (ب) emf چقدر است؟ (پ) نقطهٔ B به پایانهٔ مثبت X وصل شده است یـا پایانه منفی آن؟

شکل ۲۳-۲۹ مسئلهٔ ۱۱

حل: (الف) $P = V_{AB}i \Rightarrow 50 = V_{AB}(1) \Rightarrow V_{AB} = 50\,\text{V}$

(ب) $V_{AB} = Ri + \varepsilon \Rightarrow 50 = (2)(1) + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 48\,\text{V}$

●●۱۲- شکل ۲۳-۳۰ مقاومت $R = 6.00\,\Omega$ را نشان مـی‌دهـد که به باتری آرمانی با emf برابر $\mathscr{E} = 12.0\,\text{V}$ به کمک سیم‌های مسی متصل شده است. طـول هـر سـیم ۲۰/۰ cm و شـعاع آن ۱/۰۰mm است. در چنین مدارهایی در ایـن فـصل از اخـتلاف پتانسیل در طول سیمها و تبدیل انرژی به انرژی گرمایی در آنها چشمپوشی کردیم. اعتبـار ایـن چـشمپوشی را در مـدار شـکل ۲۳-۲۹ بررسی کنید. اختلاف پتانسیل دو سر (الف) مقاومـت و (ب) هر یک از دو بخش سیم چقدر است؟ با چه آهنگی انرژی به انرژی گرمایی در (پ) مقاومت و (ت) هر بخش سیم تبدیل می‌شود؟



شکل ۲۳-۳۰ مسئلهٔ ۱۲

حل: دو سیم یکسـان‌اند و مقاومت هر یک برابر است با

$$R_{\text{سیم}} = \rho\frac{L}{A} = (1.69\times10^{-8})\frac{0.2}{\pi(1\times10^{-3})^2} = 1.08\times10^{-3}\,\Omega$$

$$R_{eq} = R + R_{\text{سیم}} + R_{\text{سیم}} = 6 + 2(1.08\times10^{-3}) = 6.0022\,\Omega$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{12}{6.0022} = 1.9993\,\text{A}$$

(الف) $V_R = Ri = (6)(1.9993) = 11.9958\,\text{V}$

(ب) $V_{\text{سیم}} = R_{\text{سیم}}i = (1.08\times10^{-3})(1.9993) = 2.16\times10^{-3}\,\text{V}$

(پ) $P_R = Ri^2 = (6)(1.9993)^2 = 24\,\text{W}$

(ت) $P_{\text{سیم}} = R_{\text{سیم}}i^2 = (1.08\times10^{-3})(1.9993)^2$

$$= 4.3\times10^{-3}\,\text{W}$$

●●۱۳- کابل زیرزمینی طویلی به طول ۱۰km که از شـرق بـه غرب کشیده شده شامل دو سیم موازی است کـه مقاومـت هـر یک ۱۳Ω/km است. در فاصلهٔ x از انتهای غربی، با یک رسـانا به مقاومت R که دو سیم را به هم وصـل مـی‌کنـد یـک اتـصال کوتاه الکتریکی انجام می‌گیرد (شکل ۲۳-۳۱). مقاومت سیم‌هـا و اتصال کوتاه وقتی که از انتهای شـرقی آن انـدازه‌گیـری شـود برابر با $100\,\Omega$ و وقتی از انتهای غربی آن اندازه‌گیری شود برابر با $200\,\Omega$ است. (الف) x و (ب) R چقدرند؟

شکل ۲۳-۳۱ مسئلهٔ ۱۳

حل: با توجه به داده‌های مسئله فرض می‌کنیم $L=10\,km$ و $a=13\,\Omega/km$ باشند.

(الف) اگر از انتهای شرق نگاه کنیم، داریم

$$R_1=100=2a(L-x)+R$$

و اگر از انتهای غرب نگاه کنیم، داریم:

$$R_2=200=2ax+R$$

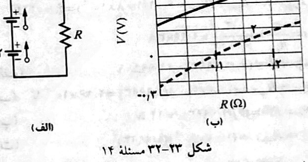
دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$200-100=4ax-2aL$$
$$100=(4)(13)x-(2)(13)(10)\Rightarrow x=6/9\,km$$

(ب) دو رابطه R_1 و R_2 را جمع کنیم، داریم:

$$300=2aL+2R$$
$$300=(2)(13)(10)+2R\Rightarrow R=20\,\Omega$$

۱۴●●- GO در شکل ۲۳-۳۲ الف هر دو باتری دارای emf برابر با $\mathscr{E}=1/20\,V$ هستند و مقاومت خارجی R متغیر است. شکل ۲۳-۳۲ ب پتانسیل‌های الکتریکی V بین پایانه‌های هر باتری را برحسب تابعی از R به دست می‌دهد: منحنی ۱ مربوط به باتری ۱ و منحنی ۲ مربوط به باتری ۲ است. مقاومت درونی (الف) باتری ۱ و (ب) باتری ۲ چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۲ مسئلهٔ ۱۴

حل: از قانون حلقه می‌توان نوشت

$$\varepsilon_2-ir_2+\varepsilon_1-ir_1-iR=0$$
$$i=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{R_1+r_1+r_2}$$

ولتاژ پایانه باتری ۱ را V_1 و ولتاژ پایانه باتری ۲ را V_2 درنظر می‌گیریم، داریم:

$$V_1=\varepsilon_1-ir_1=\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{R+r_1+r_2}r_1=1/2-\frac{2/4r_1}{R+r_1+r_2}$$
$$V_2=\varepsilon_2-ir_2=\varepsilon_2-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{R+r_1+r_2}r_2=1/2-\frac{2/4r_2}{R+r_1+r_2}$$

با توجه به نمودار V_2، در $R=0/1$ داریم $V_2=0$ و $V_1=0/4$.
لذا:

$$0/4=1/2-\frac{2/4r_1}{0/1+r_1+r_2}$$
$$0=1/2-\frac{2/4r_2}{0/1+r_1+r_2}$$

از حل همزمان دو معادله فوق برای r_1 و r_2 خواهیم داشت:

۱۵●●- ILW جریان در یک مدار تک حلقه‌ای با مقاومت R برابر است با $5/0\,A$. وقتی مقاومت اضافی $2/0\,\Omega$ به صورت متوالی با R در مدار قرار داده شود، جریان به $4/0\,A$ می‌رسد. R چقدر است؟

حل:

$$\varepsilon=Ri=5R$$
$$\varepsilon=(R+2)i'\Rightarrow 5R=(R+2)(4)\Rightarrow R=8\,\Omega$$
$$r_1=0/2\,\Omega \quad , \quad r_2=0/3\,\Omega$$

۱۶●●●- وقتی مقاومت $500\,\Omega$ به دو سر یک سلول خورشیدی وصل شود اختلاف پتانسیل $0/10\,V$ تولید می‌شود، و هرگاه مقاومت $1000\,\Omega$ جایگزین شود اختلاف پتانسیل $0/15\,V$ تولید می‌شود. (الف) مقاومت درونی و (ب) emf سلول خورشیدی چقدر است؟ (پ) مساحت سلول خورشیدی $5/0\,cm^2$ و آهنگ دریافت انرژی از نور بر یکای مساحت برابر با $2/0\,mW/cm^2$ است. بازده سلول برای تبدیل انرژی نوری به انرژی گرمایی در مقاومت خارجی $1000\,\Omega$ چقدر است؟

حل: (الف) مقاومت داخلی سلول خورشیدی را r می‌نامیم، داریم:

$$i=\frac{\varepsilon}{R+r}$$
$$V=\varepsilon-ir=\varepsilon-\frac{\varepsilon r}{R+r}=\frac{\varepsilon R}{R+r}$$
$$0/1=\frac{500\varepsilon}{500+r}$$
$$0/15=\frac{1000r}{1000+r}$$

اگر دو رابطه را بر هم تقسیم کنیم $r=1000\,\Omega$ به دست می‌آید.

$$0/1=\frac{500\varepsilon}{500+1000}\Rightarrow \varepsilon=0/3\,V$$

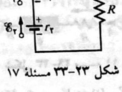
(پ) بازده سلول چنین می‌شود

$$\frac{P}{P_{\text{دریافتی}}}=\frac{V^2/R}{P_{\text{دریافتی}}}=\frac{(0/15)^2/(1000)}{(5)(2\times10^{-3})}=2/25\times10^{-3}$$

یا

$$\%0/225$$

۱۷●●●- SSM در شکل ۲۳-۳۳، emf باتری ۱ برابر با $\mathscr{E}_1=12/0\,V$ و مقاومت درونی $r_1=0/016\,\Omega$ و emf باتری ۲ برابر با $\mathscr{E}_2=12/0\,V$ و مقاومت درونی آن $r_2=0/012\,\Omega$ است. باتری‌ها به طور متوالی به مقاومت خارجی R وصل شده‌اند. (الف) چه مقدار R اختلاف پتانسیل پایانه به پایانهٔ یکی از باتری‌ها را صفر می‌کند؟ (ب) این کدام باتری است؟



شکل ۲۳-۳۳ مسئلهٔ ۱۷

حل: جریان در مدار برابر است با

$$i=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{R+r_1+r_2}=\frac{24}{R+0/028} \qquad (1)$$

ولتاژ دو سر پایانه‌های باتری‌ها برابر است با

$$V_1=\varepsilon_1-ir_1=12-0/016i$$
$$V_2=\varepsilon_2-ir_2=12-0/012i$$

چون $r_1>r_2$ نتیجه می‌گیریم ولتاژ دو سر پایانه آن زودتر صفر می‌شود و داریم

$$0=12-0/016i\Rightarrow i=\frac{12}{0/016}$$

که در رابطه (۱) قرار دهیم خواهیم داشت $R=0/004\,\Omega$.

(ب) همانطور که گفته شد باتری ۱.

بخش ۲۳-۷ مدارهای چند حلقه‌ای

۱۸●- در شکل ۲۳-۹، اگر $\mathscr{E}_1=4/0\,V$، $\mathscr{E}_2=1/0\,V$، $R_1=R_2=10\,\Omega$ و $R_3=5/0\,\Omega$ و باتری آرمانی باشد، اختلاف پتانسیل V_d-V_c میان نقطه‌های d و c چقدر است؟

حل: قاعده حلقه را برای حلقه سمت چپ و سمت راست در نظر می‌گیریم.

$$\varepsilon_1-i_1R_1+i_3R_3=0\Rightarrow 4-10i_1+5i_3=0$$
$$\varepsilon_2+i_2R_2+i_3R_3=0\Rightarrow 1+10i_2+5i_3=0$$

از قاعده گره نیز داریم

$$i_3=i_2-i_1$$

از حل همزمان این سه معادله برای جریان‌ها خواهیم داشت

$$i_1=0/275\,A \quad , \quad i_2=0/025\,A \quad , \quad i_3=-0/25\,A$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که جهت جریان i_3 صحیح انتخاب نشده است. و جهت جریان رو به بالا است. اختلاف پتانسیل بین c و d را نیز می‌توان از مسیر به دست آورد. مسیر از طریق R_2؛

$$V_d=V_c=i_2R_2=(0/025)(10)=2/5\,V$$

دو مسیر دیگر به عهده خواننده واگذار می‌شود.

۱۹●- مقاومت کل $3/00$ اهمی از اتصال یک مقاومت نامعلوم به مقاومت $12/0$ اهمی به دست آمده است. (الف) مقاومت نامعلوم باید چقدر باشد و (ب) آیا اتصال باید متوالی باشد یا موازی؟

حل: (الف) و (ب) با توجه به اینکه مقاومت کل کاهش یافته پس باید دو مقاومت به صورت موازی بسته شده باشند.

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\Rightarrow 3=\frac{12R_1}{R_1+12}\Rightarrow R_1=4\,\Omega$$

۲۰●- وقتی مقاومت‌های ۱ و ۲ به طور متوالی به یکدیگر وصل شوند، مقاومت معادل $16/0\,\Omega$ است. هرگاه به طور موازی وصل شوند، مقاومت معادل $3/0\,\Omega$ است. (الف) مقاومت کوچکتر و (ب) مقاومت بزرگتر چقدر است؟

حل: (الف) و (ب)
$$R_1+R_2=16 \quad , \quad \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=3$$

از حل همزمان این دو معادله داریم $R_1=12\,\Omega$ و $R_2=4\,\Omega$.

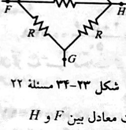
۲۱●- چهار مقاومت $18/0\,\Omega$ به طور موازی به دو سر یک باتری آرمانی $25/0\,V$ وصل شده‌اند. جریانی که از باتری می‌گذرد چقدر است؟

حل:
$$\frac{1}{R_{eq}}=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{R_i}=\frac{4}{R}\Rightarrow R_{eq}=\frac{R}{4}=\frac{18}{4}=4/5\,\Omega$$

در نتیجه جریان عبوری از باتری برابر است با

$$i=\frac{V}{R_{eq}}=\frac{25}{4/5}=5/56\,A$$

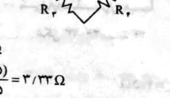
۲۲●- شکل ۲۳-۳۴ پنج مقاومت $5/00$ اهمی را نشان می‌دهد. مقاومت معادل بین نقطه‌های (الف) F و H و (ب) F و G را پیدا کنید. (*راهنمایی*: برای هر زوج نقطه، فرض کنید که یک باتری به دو سر زوج متصل است).



شکل ۲۳-۳۴ مسئلهٔ ۲۲

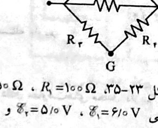
حل: (الف) مقاومت معادل بین F و H

$$R_{12}=R_1+R_2=5+5=10\,\Omega$$
$$R_{34}=R_3+R_4=5+5=10\,\Omega$$
$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\Rightarrow R_{eq}=2/5\,\Omega$$



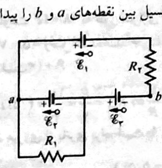
(ب)

$$R_{12}=10\,\Omega$$
$$R_{125}=\frac{(10)(5)}{10+5}=3/33\,\Omega$$
$$R_{1254}=3/33+5=8/33\,\Omega$$
$$R_{eq}=\frac{(8/33)(5)}{8/33+5}=3/12\,\Omega$$



۲۳●- در شکل ۲۳-۳۵، $R_1=100\,\Omega$، $R_2=50\,\Omega$ و در باتری‌های آرمانی $\mathscr{E}_1=6/0\,V$، $\mathscr{E}_2=5/0\,V$ و $\mathscr{E}_3=4/0\,V$

است. (الف) جریان در مقاومت ۱، (ب) جریان در مقاومت ۲ و (پ) اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b را پیدا کنید.



شکل ۲۳-۳۵ مسئلهٔ ۲۳

حل: (الف) حلقه شامل $R_۱$ را در نظر می‌گیریم. جریان را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم.

$$i_۱ = \frac{\mathcal{E}_۲}{R_۱} = \frac{۵}{۱۰۰} = ۰/۰۵\,A$$

(ب) حلقه شامل $R_۲$ را با جهت جریان ساعتگرد در نظر می‌گیریم. با استفاده از قاعده حلقه داریم

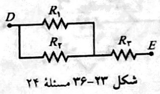
$$-\varepsilon_۱ - R_۲ i_۲ + \varepsilon_۳ + \varepsilon_۲ = ۰$$
$$i_۲ = \frac{\varepsilon_۳ + \varepsilon_۲ - \varepsilon_۱}{R_۲} = \frac{۴+۵-۶}{۵۰} = ۰/۰۶\,A$$

(پ) V_{ab} را می‌توان از سه مسیر محاسبه کرد.

$$V_a - \varepsilon_۱ - R_۲ i_۲ = V_b$$
$$V_a - V_b = \varepsilon_۱ + R_۲ i_۲ = ۶ + (۵۰)(۰/۰۶) = ۹\,V$$

دو مسیر دیگر بعهده خواننده واگذار می‌شود.

●۲۴- در شکل ۲۳-۳۶، $R_۱ = R_۲ = ۴/۰۰\Omega$ و $R_۳ = ۲/۵۰۰\,\Omega$ است. مقاومت معادل میان نقطه‌های D و E را پیدا کنید. (*راهنمایی:* فرض کنید که یک باتری به این دو نقطه وصل است).



شکل ۲۳-۳۶ مسئلهٔ ۲۴

حل:

$$R_{۱۲} = ۲\Omega$$
$$R_{eq} = R_۳ + R_{۱۲} = ۴/۵\Omega$$

●۲۵- SSM نه سیم مسی به طول l و قطر d به طور موازی به هم وصل شده و یک رسانای مرکب با مقاومت R را به وجود آورده‌اند. اگر سیم مسی به طول l به تنهایی همان مقاومت را داشته باشد، قطر D آن باید چقدر باشد؟

حل:

$$R_{eq} = \frac{R}{۹} = \frac{۱}{۹}\rho\frac{۱}{\pi d^۲/۴}$$

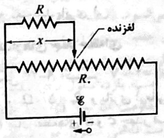
طبق فرض مسئله داریم

$$R_{eq} = \rho\frac{۱}{\pi D^۲/۴}$$

از برابر قرار دادن مقاومت‌های معادل داریم

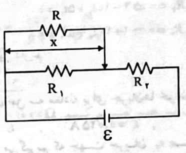
$$\frac{۴}{۹}\rho\frac{۱}{\pi d^۲} = ۴\rho\frac{۱}{\pi D^۲} \Rightarrow D = ۳d$$
$$i_۱ = ۳۶۰۰\,A$$

●●۲۶- شکل ۲۳-۳۷ یک باتری را نشان می‌دهد که به دو سر مقاومت یکنواخت $R_۰$ وصل شده است. لغزنده‌ای از $x = ۰$ تا $x = ۱۰\,cm$ از چپ به راست روی مقاومت حرکت می‌کند. حرکت لغزنده میزان مقاومت سمت چپ و مقاومت سمت راست نقطهٔ تماس را تغییر می‌دهد. آهنگ مصرف انرژی در مقاومت R را برحسب تابعی از x پیدا کنید. این تابع را به ازای $\mathcal{E} = ۵۰\,V$ ، $R = ۲۰۰۰\Omega$ و $R_۰ = ۱۰۰\,\Omega$ رسم کنید.



شکل ۲۳-۳۷ مسئلهٔ ۲۶

حل:



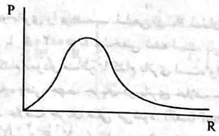
$$R_۱ + R_۲ = R_۰$$
$$R_۱ = \frac{x}{۱۰}R_۰ = aR_۰$$

برای سادگی فرض کردیم:

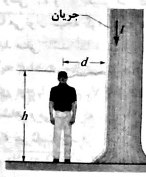
$$\frac{x}{۱۰} = a$$
$$R_۲ = (۱-a)R_۰$$
$$R' = \frac{RR_۱}{R+R_۱} = \frac{aRR_۰}{R+aR_۰}$$
$$R_{eq} = R' + R_۲ = \frac{aRR_۰}{R+aR_۰} + (۱-a)R_۰ = \frac{R_۰\left[R + a(۱-a)R_۰\right]}{R+aR_۰}$$
$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon(R+aR_۰)}{R_۰\left[R+a(۱-a)R_۰\right]}$$

ولتاژ دو سر R را V' در نظر می‌گیریم.

$$V' = R'i = \frac{aRR_۰}{R+aR_۰}\cdot\frac{\varepsilon(R+aR_۰)}{R_۰\left[R+a(۱-a)R_۰\right]} = \frac{aR\varepsilon}{R+a(۱-a)R_۰}$$
$$P = \frac{V'^۲}{R} = \frac{۱}{R}\cdot\frac{a^۲R^۲\varepsilon^۲}{\left[r+a(۱-a)R_۰\right]^۲} = \frac{x^۲R\varepsilon^۲}{۱۰۰\left[R+\frac{x}{۱۰۰}\left(۱-\frac{x}{۱۰}\right)R_۰\right]^۲}$$

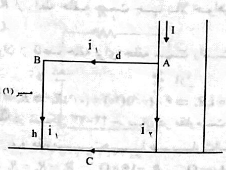


●●۲۷- [redacted] ناحیهٔ ایمن از رعد و برق. شکل ۲۳-۳۸ بیانگر این است که چرا موقع آذرخش نباید زیر درخت ایستاد. اگر آذرخش از کنارهٔ درخت پایین بیاید قسمتی از آن ممکن است وقتی به قسمت خشکی در پوستهٔ درخت برسد جهش کند و از طریق بدن شخص به داخل زمین برود. در شکل قسمتی از آذرخش فاصلهٔ d را در هوا جهش کرده و سپس از بدن شخص گذشته است (که مقاومت آن نسبت به هوا قابل چشمپوشی است). بقیهٔ جریان فاصلهٔ h را از طریق هوای مجاور درخت به زمین رفته است. اگر $d/h = ۰/۴۰۰$ و جریان کل $I = ۵۰۰۰A$ باشد، جریانی که از بدن شخص می‌گذرد چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۸ مسئلهٔ ۲۷

حل:



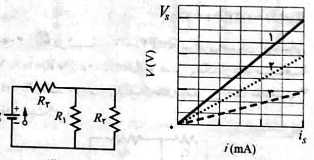
در نقطهٔ A جریان از دو مسیر به زمین می‌رود یکی از طریق هوای مجاور درخت (مسیر ۲) جریان در این مسیر $i_۲$ است و جریان $i_۱$ از مسیر ۱ یعنی هوا و بدن شخصی که مقاومت ناچیزی دارد.

$$V_{AC} = R_۱ i_۱ = R_۲ i_۲$$
$$\frac{i_۱}{i_۲} = \frac{R_۲}{R_۱}$$

نسبت مقاومت‌ها به نسبت طول مسیر در هوا می‌باشد.

$$\frac{i_۱}{i_۲} = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{i_۱}{i_۱ + i_۲} = \frac{h}{d+h}$$
$$\frac{i_۱}{۵۰۰۰} = \frac{h}{۰/۴۰۰+h} = \frac{۱}{۱/۴}$$

●●۲۸- emf باتری آرمانی در شکل ۲۳-۳۹ الف $\mathcal{E} = ۶/۰\,V$ است. نمودار ۱ در شکل ۲۳-۳۹ ب جریان i در مقاومت ۱ مدار را برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی V برقرار شده در دو سر آن مقاومت به دست می‌دهد. مقیاس محور V با $V_s = ۱۸/۰V$ ، و مقیاس محور i با $i_s = ۳/۰۰mA$ مشخص شده است. نمودارهای ۲ و ۳ نمودارهای مشابهی را به ترتیب برای مقاومتهای ۲ و ۳ نشان می‌دهند. جریان در مقاومت ۲ چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۹ مسئلهٔ ۲۸

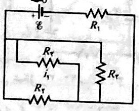
حل: شیب نمودارها مقاومت را به دست می‌دهند.

$$R_۱ = \frac{\Delta V}{\Delta i_۱} = \frac{۱۸}{۳\times۱۰^{-۳}} = ۶۰۰۰\,\Omega$$
$$R_۲ = \frac{\Delta V}{\Delta i_۲} = \frac{۱۲}{۳\times۱۰^{-۳}} = ۴۰۰۰\,\Omega$$
$$R_۳ = \frac{\Delta V}{\Delta i_۳} = \frac{۶}{۳\times۱۰^{-۳}} = ۲۰۰۰\,\Omega$$

$R_۱$ و $R_۲$ موازی بسته شده‌اند.

$$R_{۱۲} = \frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲} = ۲۴۰۰\Omega$$
$$\varepsilon = (R_۳ + R_{۱۲})i \Rightarrow ۶ = (۲۰۰۰+۲۴۰۰)i \Rightarrow i = ۱/۳۶\times۱۰^{-۳}\,A$$
$$V_{۱۲} = R_{۱۲}i = (۲۴۰۰)(۱/۳۶\times۱۰^{-۳}) = ۳/۲۶V$$
$$\overline{L}_۲ = \frac{V_{۱۲}}{R_۲} = \frac{۳/۲۶}{۴۰۰۰} = ۸/۱۵\times۱۰^{-۴}\,A$$

●●۲۹- در شکل ۲۳-۴۰، $R_۱ = ۶/۰۰\,\Omega$ ، $R_۲ = ۱۸/۰\,\Omega$ و emf باتری آرمانی $\mathcal{E} = ۱۲/۰\,V$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان $i_۱$ چیست؟ (پ) چقدر انرژی در چهار مقاومت در $۱/۰۰\,min$ مصرف می‌شود؟



شکل ۲۳-۴۰ مسئله ۲۹

حل: (الف) سه مقاومت $R_۲$ موازی‌اند و مقاومت معادل آنها برابر $R=۶\Omega$ است که با $R_۱$ به صورت متوالی می‌باشد لذا مقاومت معادل مدار برابر $R_{eq}=۱۲\Omega$ خواهد بود. در نتیجه جریان در R_{eq} برابر است با: $i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱A$

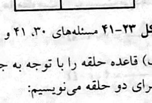
همین جریان از مقاومت R نیز عبور می‌کند و بنا به تقارن جریان عبوری از هر یک از مقاومت‌های $R_۲$ برابر $(۱/۳)A$ در نتیجه $i_۱=۰/۳۳A$ است.

(ب) جهت جریان از چپ به راست است.

(پ) $P=R_{eq}i^۲=(۱۲)(۱)^۲=۱۲W$

$W=Pt=(۱۲)(۶۰)=۷۲۰J$

●●۳۰- GO در شکل ۲۳-۴۱ emf باتری‌های آرمانی $\mathscr{E}_۱=۱۰/۰V$ و $\mathscr{E}_۲=۰/۵۰۰\varepsilon_۱$ و هر یک از مقاومت‌ها $۴/۰۰\Omega$ است. جریان در (الف) مقاومت ۲ و (ب) مقاومت ۳ چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۱ مسئله‌های ۳۰، ۴۱ و ۸۸

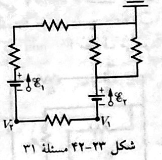
حل: (الف) و (ب) قاعده حلقه را با توجه به جهت جریانها در جهت $\varepsilon_۱$ و $\varepsilon_۲$ برای دو حلقه می‌نویسیم:

$\varepsilon_۱-i_۱R_۱-(i_۱+i_۲)R_۳=۰$

$\varepsilon_۲-i_۲R_۲-(i_۱+i_۲)R_۳$

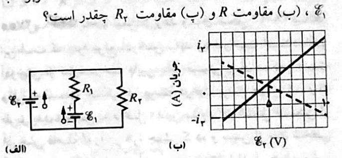
و همچنین طبق قاعده گره داریم $i_۳=i_۱+i_۲$. از حل همزمان معادله‌ها $i_۲=۰$ و $i_۳=۱/۲۵A$ به دست می‌آید.

●●۳۱- SSM GO در شکل ۲۳-۴۲، emf باتری‌های آرمانی $\mathscr{E}_۱=۵/۰V$ و $\mathscr{E}_۲=۱۲V$، و هر یک از مقاومت‌ها $۲/۰\Omega$ و پتانسیل در نقطهٔ اتصال به زمین مدار صفر تعریف می‌شود. پتانسیل‌های (الف) $V_۱$ و (ب) $V_۲$ در نقطه‌های نشان داده شده چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۲ مسئلهٔ ۳۱

●●۳۲- هر دو باتری در شکل ۲۳-۴۳ (الف) آرمانی‌اند. مقدار emf باتری ۱ ثابت است ولی emf باتری ۲ می‌تواند میان مقدار ۱/۰V و ۱۰V تغییر کند. نمودار شکل ۲۳-۴۳ ب جریان‌های عبوری از دو باتری را برحسب تابعی از $\mathscr{E}_۲$ نشان می‌دهد. مقیاس قائم با $i_۲=۰/۲۰A$ مشخص شده است. باید تصمیم بگیرید که کدام نمودار متناظر با کدام باتری است، ولی در مورد هر دو نمودار، وقتی جهت جریان در باتری خلاف جهت emf باتری باشد، علامت جریان منفی می‌شود. (الف) emf مربوط به $\mathscr{E}_۱$، (ب) مقاومت R و (پ) مقاومت $R_۲$ چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۳ مسئلهٔ ۳۲

حل: (الف) حلقه سمت چپ را در نظر گرفته و قاعده حلقه را می‌نویسیم، داریم:

$\varepsilon_۲+i_۱R_۱-\varepsilon_۱=۰$

با توجه به اینکه وقتی $\varepsilon_۲$ و $i_۱$ تغییر می‌کنند $\varepsilon_۱$ ثابت نگه داشته می‌شود لذا می‌توان نتیجه گرفت که به ازای مقادیر بزرگ $\varepsilon_۲$، جریان $i_۱$ باید منفی باشد. لذا شیب روبه‌پایین یعنی نمودار خط‌چین مربوط به $i_۱$ است. حال با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که به ازای $i_۱=۰$، داریم $\varepsilon_۱=\varepsilon_۲=۶V$.

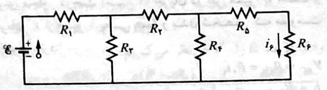
(ب) از منحنی مشاهده می‌شود که در $\varepsilon_۲=۲V$، $i_۱=۰/۲A$ و از طرفی $\varepsilon_۱=۶V$ نیز ثابت و برقرار است لذا از رابطه قاعده حلقه بالا خواهیم داشت $R_۱=۲۰\Omega$.

(پ) با توجه به منحنی مربوط به $i_۲$، مشاهده می‌کنیم که به ازای $i_۲=۰$، $\varepsilon_۲=۴V$ و با در نظر گرفتن $\varepsilon_۱=۶V$ و $R_۱=۲۰\Omega$ از رابطه حلقهٔ سمت چپ بالا خواهیم داشت $i_۱=۰/۱A$.

حال می‌توان از قاعدهٔ حلقه برای حلقه سمت راست استفاده کرد.

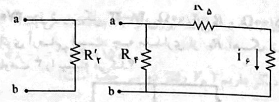
$\varepsilon_۱-i_۱R_۱=i_۱R_۲\Rightarrow ۶-(۰/۱)(۲۰)=(۰/۱)R_۲\Rightarrow R_۲=۴۰\Omega$

●●۳۳- GO در شکل ۲۳-۴۴ جریان در مقاومت ۶ برابر $i_۶=۱/۴۰A$ و مقاومت‌ها عبارت‌اند از $R_۱=R_۲=R_۳=۲/۰۰\Omega$، $R_۴=۱۶/۰\Omega$، $R_۵=۸/۰۰\Omega$ و $R_۶=۴/۰۰\Omega$. emf باتری آرمانی چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۴ مسئله ۳۳

حل: طبق روش مرسوم از سمت راست مدار را بررسی می‌کنیم.



$R'_۱=R_{۵۶}=۸+۴=۱۲\Omega$

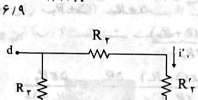
$V_{ab}=R'_۱i_۶=(۱۲)(۱/۴)=۱۶/۸V$

مقاومت معادل دو مقاومت $R'_۱$ و $R_۴$ برابر است با

$R'_۲=\frac{R_۴R'_۱}{R_۴+R'_۱}=\frac{(۱۶)(۱۲)}{۱۶+۱۲}=۶/۹\Omega$

حال می‌توان جریانی که از $R'_۲$ می‌گذرد را حساب کرد

$i_۱=\frac{V_{ab}}{R'_۲}=\frac{۱۶/۸}{۶/۹}=۲/۴۳A$



معادل مقاومت $R'_۲$ و $R_۲$ نیز برابر است با

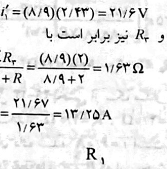
$R'_۳=R_۲+R'_۲=۲+۶/۹=۸/۹\Omega$

$V_{de}=R'_۳i'_۱=(۸/۹)(۲/۴۳)=۲۱/۶V$

معادل مقاومت $R'_۳$ و $R_۳$ نیز برابر است با

$R'_۴=\frac{R'_۳R_۳}{R'_۳+R}=\frac{(۸/۹)(۲)}{۸/۹+۲}=۱/۶۳\Omega$

$i'_۲=\frac{V_{de}}{R'_۴}=\frac{۲۱/۶۷}{۱/۶۳}=۱۳/۲۵A$



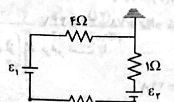
$R_{eq}=R_۱+R'_۴=۲+۱/۶۳=۳/۶۳\Omega$

$\varepsilon=R_{eq}i'_۲=(۳/۶۳)(۱۳/۲۵)=۴۸/۱\Omega$

حل: مدار داده شده را می‌توان به صورت زیر ساده کرده و پس از آن جریان را به دست آورد.

$-۲i-\varepsilon_۱-۴i-i+\varepsilon_۲=۰$

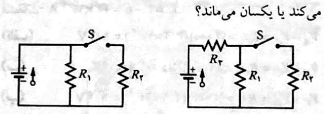
$-۷i-۵+۱۲=۰\Rightarrow i=۱A$



(الف) $V_۱+\varepsilon_۲-i=۰\Rightarrow V_۱=-۱۲+۱=-۱۱V$

(ب) $V_۲-Ri=V_۱\Rightarrow V_۲=-۱۱+(۲)(۱)=-۹V$

●●۳۴- مقاومت‌ها در شکل‌های ۲۳-۴۵ الف و ب همگی $۶/۰\Omega$ و emf باتری‌های آرمانی ۱۲V است. (الف) وقتی کلید S در شکل ۲۳-۴۵ الف بسته شود، آیا پتانسیل الکتریکی $V_۱$ دو سر مقاومت ۱ تغییر می‌کند یا یکسان می‌ماند؟ (ب) وقتی کلید در شکل ۲۳-۴۵ ب بسته شود، آیا $V_۱$ دو سر مقاومت ۱ تغییر می‌کند یا یکسان می‌ماند؟



شکل ۲۳-۴۵ مسئلهٔ ۳۴

حل: (الف) در شکل (الف) در حالت باز بودن کلید

$V_۱=\varepsilon=۱۲V$

در حالت بسته بودن کلید اختلاف پتانسیل کماکان همان اختلاف پتانسیل روی $R_۱$ است.

(ب) در شکل (ب) در حالت باز بودن کلید اختلاف پتانسیل دو سر $R_۱$ برابر است با:

$i=\frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱A$

$V_۱=R_۱i=(۶)(۱)=۶V$

در حالتی که کلید بسته است داریم:

$R_{۱۲}=\frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲}=۳\Omega$

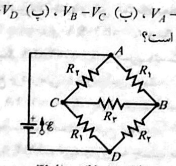
$R_{eq}=R_۳+R_{۱۲}=۶+۳=۹\Omega$

$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۱۲}{۹}=۱/۳۳A$

$V_۱=iR_{۱۲}=(۱/۳۳)(۳)=۴V$

در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر $R_۱$ تغییر می‌کند.

●●۳۵- در شکل ۲۳-۴۶، $\mathscr{E}=۱۲/۰V$، $R_۱=۲۰۰۰\Omega$، $R_۲=۳۰۰۰\Omega$ و $R_۳=۴۰۰۰\Omega$ است. اختلاف پتانسیل (الف) V_A-V_B، (ب) V_B-V_C، (پ) V_C-V_D و (ت) V_A-V_C چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۶ مسئلهٔ ۳۵

حل:

$\varepsilon=V_{AC}+V_{CD}=R_۲i_۲+R_۱i_۱\Rightarrow ۱۲=۳۰۰۰i_۲+۲۰۰۰i_۱$ (۱)

در حلقه $ABCA$ داریم

$$-R_۲ i_۲ + R_۴(i_۱ - i_۲) - R_۱ i_۱$$

$$-۳۰۰۰ i_۲ + ۴۰۰۰ i_۱ - ۴۰۰۰ i_۲ - ۲۰۰۰ i_۱ = ۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -۷ i_۲ + ۲ i_۱ = ۰ \Rightarrow i_۲ = \frac{۲}{۷} i_۱ \qquad (۲)$$

با قرار دادن (۲) در (۱)، جریان‌های $i_۱$ و $i_۲$ به دست می‌آیند $i_۱ = ۴/۲\times۱۰^{-۳}$ A و $i_۲ = ۱/۲\times۱۰^{-۳}$ A. با استفاده از قاعده انشعاب $i_۳ = i_۱ - i_۲ = +۳\times۱۰^{-۳}$ A.

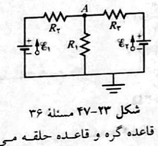
(الف) $V_A - V_B = R_۱ i_۱ = (۲۰۰۰)(۴/۲\times۱۰^{-۳}) = ۸/۴\text{V}$

(ب) $V_B - V_C = R_۴ i_۳ = (۴۰۰۰)(۳\times۱۰^{-۳}) = ۱۲\text{V}$

(پ) $V_C - V_D = R_۱ i_۱ = (۲۰۰۰)(۴/۲\times۱۰^{-۳}) = ۸/۴\text{V}$

(ت) $V_A - V_C = R_۲ i_۲ = (۳۰۰۰)(۱/۲\times۱۰^{-۳}) = ۳/۶\text{V}$

●●۳۶- در شکل ۲۳-۴۷، $\mathscr{E}_۱ = ۶/۰۰$ V، $\mathscr{E}_۲ = ۱۲/۰$ V، $R_۱ = ۱۰۰\,\Omega$، $R_۲ = ۲۰۰\,\Omega$ و $R_۳ = ۳۰۰\,\Omega$ است. یک نقطهٔ مدار به زمین متصل شده است. ($V = ۰$). (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان در مقاومت ۱، (پ) اندازه و (ت) جهت (چپ یا راست) جریان در مقاومت ۲ و (ث) اندازه و (ج) جهت جریان در مقاومت ۳ چیست؟ (چ) پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ A چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۷ مسئلهٔ ۳۶

حل: با استفاده از قاعده گره و قاعده حلقه می‌توان نوشت. جریانها را در حلقه سمت چپ ساعتگرد و در حلقه سمت راست پادساعتگرد در نظر می‌گیریم.

$$i_۱ = i_۲ + i_۳$$

$$\varepsilon_۱ - R_۲ i_۲ - R_۱ i_۱ = ۰$$

$$\varepsilon_۲ - R_۳ i_۳ - R_۱ i_۱ = ۰$$

با قرار دادن مقادیر داده شده و حل همزمان معادله‌ها خواهیم داشت $i_۱ = ۰/۰۳۸۲$A و $i_۲ = ۰/۰۱۰۹$A و $i_۳ = ۰/۰۲۷۳$ A.

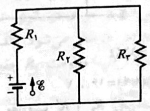
(الف) و (ب) $i_۱ = ۰/۰۳۸۲$A و چون مثبت است جهت انتخابی صحیح بوده یعنی $i_۱$ روبه‌پایین است.

(پ) و (ت) $i_۲ = ۰/۰۱۰۹$A، چون مثبت است پس جهت انتخابی چپ به سمت راست صحیح است.

(ث) و (ج) $i_۳ = ۰/۰۲۷۳$A و روبه چپ می‌باشد. (چ) پتانسیل در A برابر است با

(چ) $V_A = i_۱ R_۱ = (۰/۰۳۸۲)(۱۰۰) = ۳/۸۲$

●●۳۷- در شکل ۲۳-۴۸، $R_۱ = ۲/۰۰\,\Omega$، $R_۲ = ۵/۰۰\,\Omega$ و باتری آرمانی است. چه مقداری از $R_۳$ آهنگ اتلاف در مقاومت ۳ را بیشینه می‌کند؟



شکل ۲۳-۴۸ مسئله‌های ۳۷ و ۹۸

حل:

$$R_{۲۳} = \frac{R_۲ R_۳}{R_۲ + R_۳} = \frac{۵R_۳}{۵ + R_۳}$$

$$R_{eq} = R_۱ + R_{۲۳} = ۲ + \frac{۵R_۳}{۵ + R_۳} = \frac{۷R_۳ + ۱۰}{۵ + R_۳}$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon(۵ + R_۳)}{۷R_۳ + ۱۰}$$

$$V_۳ = iR_{۲۳} = \frac{\varepsilon(۵ + R_۳)}{۷R_۳ + ۱۰} \cdot \frac{۵R_۳}{۵ + R_۳} = \frac{۵\varepsilon R_۳}{۷R_۳ + ۱۰}$$

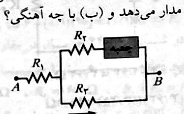
آهنگ اتلاف در $R_۳$ برابر است با:

$$P = \frac{V_۳^۲}{R_۳} = \frac{۱}{R_۳}\left(\frac{۵\varepsilon R_۳}{۷R_۳ + ۱۰}\right)^۲ = \frac{۲۵\varepsilon^۲ R_۳}{(۷R_۳ + ۱۰)^۲}$$

$$\frac{dP}{dR_۳} = ۰ \quad \frac{dP}{dR_۳} = ۲۵\varepsilon^۲\left[\frac{(۷R_۳ + ۱۰)^۲ - ۱۴(۷R_۳ + ۱۰)R_۳}{(۷R_۳ + ۱۰)^۴}\right] = ۰$$

$$\Rightarrow ۷R_۳ + ۱۰ - ۱۴R_۳ = ۰ \qquad R_۳ = ۱/۴۳\,\Omega$$

●●۳۸- شکل ۲۳-۴۹ بخشی از یک مدار را نشان می‌دهد. مقاومتهاعبارت‌انداز $R_۱ = ۲/۰\,\Omega$، $R_۲ = ۴/۰\,\Omega$، $R_۳ = ۶/۰\,\Omega$ و جریان نشان داده شده $i = ۶/۰$A است. اختلاف پتانسیل الکتریکی میان نقطه‌های A و B که این بخش مدار را به بقیه مدار وصل می‌کند برابر $V_A - V_B = ۷۸$V است. (الف) آیا وسیله‌ای که با «جعبه» نشان داده شده است انرژی را از مدار می‌گیرد یا به مدار می‌دهد و (ب) با چه آهنگی؟



شکل ۲۳-۴۹ مسئلهٔ ۳۸

حل: ابتدا اختلاف پتانسیل دو سر $R_۳$ را به دست می‌آوریم

$$V_۳ = R_۳ i = (۶)(۶) = ۳۶\text{V}$$

در نتیجه

$$V_۱ = (V_A - V_B) - V_۳ = ۷۸ - ۳۶ = ۴۲\text{V}$$

و جریان عبوری از $R_۱$ برابر است با

$$i_۱ = \frac{V_۱}{R_۱} = \frac{۴۲}{۲} = ۲۱\text{A}$$

و از قاعده انشعاب جریان عبوری از $R_۲$ به دست می‌آید.

$$i_۲ = i_۱ - i = ۲۱ - ۶ = ۱۵\text{A}$$

از طرف دیگر داریم (V_b ولتاژ دو سر جعبه است)

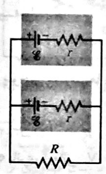
$$V_۳ = V_۲ + V_b = R_۲ i_۲ + V_b$$

$$۳۶ = (۴)(۱۵) + V_b \Rightarrow V_b = -۲۴\text{V}$$

چون اختلاف پتانسیل دو سر جعبه منفی است لذا می‌توان گفت که این وسیله در حال گرفتن انرژی از مدار است.

(ب) $P = V_b i_۲ = (۲۴)(۱۵) = ۳۶۰\text{ W}$

●●۳۹- در شکل ۲۳-۵۰، دو باتری با emf برابر با $\mathscr{E} = ۱۲/۰$V و مقاومت درونی $r = ۰/۳۰۰\,\Omega$ به طور موازی به دو سر مقاومت R بسته شده‌اند. (الف) به ازای چه مقدار R آهنگ مصرف در مقاومت بیشینه است؟ (ب) این بیشینه چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۰ مسئله‌های ۳۹ و ۴۰

حل: (الف) چون باتریها مشابه‌اند جریانی که از آنها می‌گذرد یکسان است و اگر آن را i در نظر بگیریم جریانی که از مقاومت R می‌گذرد برابر $۲i$ می‌باشد. از قانون حلقه، برای حلقهٔ پایین داریم:

$$\varepsilon - ir - ۲iR = ۰ \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{r + ۲R}$$

توان تلف شده در R برابر است با:

$$P = R(۲i)^۲ = R\frac{۴\varepsilon^۲}{(r + ۲R)^۲}$$

برای اینکه توان بیشینه شود باید $dP/dR = ۰$ باشد

$$\frac{dP}{dR} = \frac{۴\varepsilon^۲(r + ۲R)^۲ - ۴R(r + ۲R)}{(r + ۲R)^۴} = ۰$$

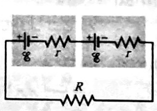
$$r + ۲R - ۴R = ۰ \Rightarrow R = \frac{r}{۲}$$

که به ازای $r = ۰/۳\,\Omega$ خواهیم داشت $R = ۰/۶\,\Omega$.

(ب) اگر $R = r/۲$ را در رابطه P قرار دهیم آهنگ اتلاف بیشینه به دست می‌آید.

$$P_{\max} = \frac{۴\varepsilon^۲(r/۲)}{\left[r + ۲\left(\frac{r}{۲}\right)\right]^۲} = \frac{\varepsilon^۲}{۲r} = \frac{(۱۲)^۲}{۲(۰/۳)} = ۲۴۰\text{ W}$$

●●۴۰- می‌خواهیم دو باتری مشابه با emf برابر با $\mathscr{E} = ۱۲/۰$V و مقاومت درونی $r = ۰/۲۰۰\,\Omega$ را به یک مقاومت خارجی R، به صورت موازی (شکل ۲۳-۵۰) یا به صورت متوالی (شکل ۲۳-۵۱) ببندیم. اگر $R = ۲/۰۰r$ باشد، جریان i در مقاومت خارجی در آرایش‌های (الف) موازی و (ب) متوالی چقدر است؟ (پ) در کدام آرایش جریان i بیشتر است؟ اگر $R = r/۲/۰۰$ باشد، i در مقاومت خارجی در آرایش‌های (ت) موازی و (ث) متوالی چقدر است؟ (ج) برای کدام آرایش i بیشتر است؟



شکل ۲۳-۵۱ مسئلهٔ ۴۰

حل: (الف) چون باتری‌ها مشابه و به طور موازی‌اند مانند مسئله ۴۱ جریان در آنها یکسان و جریانی که از R می‌گذرد برابر $۲i$ می‌باشد و از قانون حلقه داریم:

$$\varepsilon = ir + (۲i)R \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{r + ۲R}$$

$$i_R = ۲i = \frac{۲\varepsilon}{r + ۲R} = \frac{۲(۱۲)}{۰/۲ + (۲)(۰/۴)} = ۲۴\text{A}$$

(ب) در بهم بستن متوالی جریان‌ها یکسانند و داریم:

$$\sum \varepsilon = i\sum R \Rightarrow ۲\varepsilon = ۲ir + iR$$

$$i_R = i = \frac{۲\varepsilon}{۲r + R} = \frac{۲(۱۲)}{۲(۰/۲) + ۰/۴} = ۳۰\text{A}$$

(پ) در بهم بستن متوالی، چون $R > r$ است.

(ت) به ازای $R = r/۲ = ۰/۱\,\Omega$ در بهم بستن موازی داریم:

$$i_R = \frac{۲\varepsilon}{r + ۲R} = \frac{۲(۱۲)}{۰/۲ + (۲)(۰/۱)} = ۶۰\text{A}$$

(ث) و برای اتصال متوالی داریم:

$$i_R = \frac{۲\varepsilon}{۲r + R} = \frac{۲(۱۲)}{۲(۰/۲) + ۰/۱} = ۴۸\text{A}$$

(ج) در آرایش موازی، چون $R < r$ است.

●●۴۱- شکل ۲۳-۴۱، $\mathscr{E}_۱ = ۳/۰۰$ V، $\mathscr{E}_۲ = ۱/۰۰$ V، $R_۱ = ۴/۰۰\,\Omega$، $R_۲ = ۲/۰۰\,\Omega$، $R_۳ = ۵/۰۰\,\Omega$ و هر دو باتری آرمانی‌اند. آهنگ مصرف انرژی در (الف) $R_۱$، (ب) $R_۲$ و (پ) $R_۳$ چقدر است؟ توان (ت) باتری ۱ و (ث) باتری ۲ چقدر است؟

حل: در دو حلقه سمت چپ و راست را ساعتگرد در نظر می‌گیریم و قاعده حلقه‌ها و انشعاب را به کار می‌بریم.

$$i_۳ = i_۱ - i_۲$$

$$\varepsilon_۱ - R_۱ i_۱ - R_۳ i_۳ = ۰$$

$$\varepsilon_۲ + R_۲ i_۲ + R_۳ i_۳ = ۰$$

با قرار دادن مقادیر داده شده و حل همزمان این معادلات برای جریان‌ها داریم $i_1 = 0.421\,A$ ، $i_2 = 0.158\,A$ و $i_3 = 0.263\,A$. پاسخ مثبت بیانگر انتخاب صحیح جهت جریان‌ها است.

(الف) توان تلف شده در R_1 برابر است با:

$$P_1 = R_1 i_1^2 = (4)(0.421)^2 = 0.709\,W$$

(ب) اتلاف در R_2 برابر است با:

$$P_2 = R_2 i_2^2 = (2)(0.158)^2 = 0.05\,W$$

(پ) اتلاف در R_3 برابر است با:

$$P_3 = R_3 i_3^2 = (5)(0.263)^2 = 0.346\,W$$

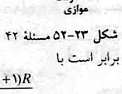
(ت) توان باتری ۱ برابر است با:

$$P_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 i_1 = (3)(0.421) = 1.26\,W$$

(ث)

$$P_{\varepsilon_1} = \varepsilon_2 i_2 = (1)(0.158) = 0.158\,W$$

۴۲●●- در شکل ۲۳-۵۲، آرایه‌ای شامل n مقاومت موازی به طور متوالی به یک باتری آرمانی و یک مقاومت بسته شده‌اند. اندازهٔ همهٔ مقاومتها یکسان است. اگر مقاومت یکسانی به طور موازی به این آرایش افزوده شود، جریان باتری به اندازهٔ ۱/۲۵٪ تغییر می‌کند. مقدار n چیست؟



شکل ۲۳-۵۲ مسئلهٔ ۴۲

حل: مقاومت معادل برابر است با

$$R_{eq} = R + \frac{R}{n} = \frac{(n+1)R}{n}$$

در این حالت جریان در باتری برابر است با:

$$i_n = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{n\varepsilon}{(n+1)R}$$

لذا i_{n+1} برابر است با:

$$i_{n+1} = \frac{(n+1)\varepsilon}{(n+2)R}$$

برای اینکه افزایش نسبی برابر با $\frac{1}{80} = 0.0125$ باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{i_{n+1} - i_n}{i_n} = \frac{i_{n+1}}{i_n} - 1 = \frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}{\left(\frac{n}{n+1}\right)} - 1 = \frac{1}{80} \Rightarrow n = 8$$

۴۳●●- تعدادی مقاومت ۱۰ اهمی در اختیار است که توان مصرفی هر کدام بدون سوختن $1.0\,W$ است. کمترین تعداد این‌گونه مقاومت‌ها چقدر باید باشد تا ترکیبی از آنها به طور متوالی یا موازی با مقاومت $10\,\Omega$ ایجاد شود و دست کم توان مصرفی $5.0\,W$ را داشته باشد؟

حل: با توجه به اینکه مقاومت معادل با مقاومت اولیه برابر است لذا تعداد ردیف با تعداد مقاومت‌هایی که در هر ردیف وجود دارد برابر است. از طرف دیگر چون توان مصرفی مجموع $5\,W$ است لذا اگر n تعداد ردیف‌ها باشد در هر ردیف n مقاومت وجود دارد. بیشترین جریانی که از هر مقاومت می‌گذرد برابر است با:

$$P_1 = R_1 i^2 \Rightarrow 1 = 10 i_1^2 \Rightarrow i_1 = 0.316\,A$$

جریان کل برابر است با:

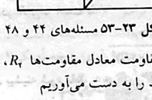
$$5 = 10 i^2 \Rightarrow i = 0.707\,A$$

تعداد ردیف‌ها برابر است با:

$$n = \frac{i}{i_1} = \frac{0.707}{0.316} = 2.24$$

و چون می‌خواهیم از سوختن مقاومت‌ها جلوگیری شود لذا باید $n = 3$ باشد.

۴۴●●- در شکل ۲۳-۵۳، $R_1 = 100\,\Omega$ ، $R_2 = R_3 = 50.0\,\Omega$ ، $R_4 = 75.0\,\Omega$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon = 6.00\,V$ است. (الف) مقاومت معادل چقدر است؟ i در (ب) مقاومت ۱، (پ) مقاومت ۲، (ت) مقاومت ۳ و (ث) مقاومت ۴، چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۳ مسئله‌های ۴۴ و ۴۸

حل: (الف) ابتدا مقاومت معادل مقاومت‌ها R_2، R_3 و R_4 که به صورت موازی‌اند را به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \frac{1}{75} \Rightarrow R_{234} = 18.75\,\Omega$$

$$R_{eq} = R_1 + R_{234} = 100 + 18.75 = 118.75$$

(ب) جریان عبوری از R_1 همان جریان کل مدار است

$$i_1 = i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{6}{118.75} = 5.05\times10^{-2}\,A$$

(پ) ولتاژ دو سر R_2، R_3 و R_4 با هم برابر و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$V_2 = V_{234} = iR_{234} = (5.05\times10^{-2})(18.75) = 0.95\,V$$

$$i_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{0.95}{50} = 1.9\times10^{-2}\,A$$

(ت)

$$V_3 = V_2 = 0.95\,V$$

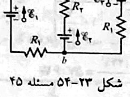
$$i_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{0.95}{50} = 1.9\times10^{-2}\,A$$

(ث)

$$V_4 = V_2 = 0.95\,V$$

$$i_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{0.95}{75} = 1.25\times10^{-2}\,A$$

۴۵●●- ILW در شکل ۲۳-۵۴، مقاومت‌ها عبارت‌اند از $R_1 = 1.0\,\Omega$ و $R_2 = 2.0\,\Omega$ و emf باتری‌های آرمانی $\mathscr{E}_1 = 2.0\,V$ و $\mathscr{E}_2 = 4.0\,V$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان در باتری ۱، (پ) اندازه و (ت) جهت جریان در باتری ۲ و (ث) اندازه و (ج) جهت جریان در باتری ۳، چیست؟ (چ) اختلاف پتانسیل $V_a - V_b$ چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۴ مسئله ۴۵

حل: قاعده حلقه را برای دو حلقه سمت چپ و راست می‌نویسیم و جریان در آنها را به ترتیب i_1 و i_2 و پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. جریان عبوری از شاخه وسط برابر $i_3 = i_1 - i_2$ می‌شود، لذا داریم:

$$-i_1R_1 - \varepsilon_1 - i_1R_1 - (i_1 - i_2)R_2 + \varepsilon_2 = 0$$

$$-i_2R_1 + \varepsilon_2 - i_2R_1 - \varepsilon_2 + (i_1 - i_2)R_2 = 0$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده و حل همزمان دو معادله خواهیم داشت $i_1 = 0.66\,A$ و $i_2 = 0.33\,A$ و در نتیجه $i_3 = 0.33\,A$ می‌شود.

(الف) و (ب) $i_1 = 0.66\,A$ و چون مثبت است لذا جهت انتخاب شده پادساعتگرد صحیح بوده و i_1 در ε_1 به سمت پایین است.

(پ) و (ت) $i_2 = 0.33\,A$ و چون مثبت است پس i_2 در ε_2 به سمت بالا است.

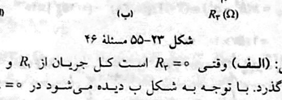
(ث) و (ج) $i_3 = 0.33\,A$ و چون مثبت است لذا رو به بالا می‌باشد.

(چ)

$$V_a - R_1i_1 - \varepsilon_1 - R_1i_1 = V_b$$

$$V_a - V_b = 2R_1i_1 + \varepsilon_1 = (2)(1)(0.66) + 2 = 3.34\,V$$

۴۶●●- در شکل ۲۳-۵۵ الف مقاومت ۳ متغیر و emf باتری آرمانی $\mathscr{E} = 12\,V$ است. شکل ۲۳-۵۵ ب جریان عبوری i از باتری را برحسب تابعی از R_3 به دست می‌دهد. وقتی $R_3 \to \infty$ میل کند، منحنی دارای مجانب $2.0\,mA$ است. (الف) مقاومت R_1 و (ب) مقاومت R_2 چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۵ مسئلهٔ ۴۶

حل: (الف) وقتی $R_3 = 0$ است کل جریان از R_1 و R_3 می‌گذرد. با توجه به شکل ب دیده می‌شود در $R_3 = 0$، $i = 6\,mA$ است و در نتیجه داریم

$$R_1 = \frac{\varepsilon}{i} = \frac{12}{0.006} = 2\times10^3\,\Omega$$

(ب) وقتی $R_3 \to \infty$ به جای اتصال کوتاه حالت قبل در اینجا اتصال باز داریم و کل جریان از R_1 و R_2 می‌گذرد. با توجه به شکل ب دیده می‌شود که به ازای $R_3 = \infty$، جریانی که از باتری می‌گذرد برابر $i = 2\,mA$ است و در نتیجه داریم

$$\varepsilon = i(R_1 + R_2) \Rightarrow 12 = (2\times10^{-3})(2\times10^3 + R_2) \Rightarrow$$
$$R_2 = 4\times10^3\,\Omega$$

۴۷●●- SSM یک سیم مسی به شعاع $a = 0.250\,mm$ دارای یک پوشش آلومینیومی به شعاع خارجی $b = 0.380\,mm$ است. در سیم مرکب جریان $i = 2.00\,A$ وجود دارد. با استفاده از جدول ۲۲-۱، جریان در (الف) مس و (ب) آلومینیوم را محاسبه کنید. (پ) اگر اختلاف پتانسیل $V = 12.0\,V$ میان دو سر جریان را ثابت نگهدارد، طول سیم مرکب چقدر است؟

حل:

$$A_{Cu} = \pi a^2 (3.14)(0.25\times10^{-3})^2 = 1.96\times10^{-7}\,m^2$$

$$A_{Al} = \pi(b^2 - a^2) = (3.14)[(0.38)^2 - (0.25)^2]\times10^{-6}$$
$$= 2.57\times10^{-7}\,m^2$$

$$R_{Cu} = \rho_{Cu}\frac{L_{Cu}}{A_{Cu}} = (1.69\times10^{-8})\frac{L}{(1.96\times10^{-7})} = 8.62\times10^{-2}\,L$$

$$R_{Al} = \rho_{Al}\frac{L_{Al}}{A_{Al}} = (2.75\times10^{-8})\frac{L}{(2.57\times10^{-7})} = 0.107\,L$$

مقاومت معادل دو سیم موازی برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{R_{Cu}R_{Al}}{R_{Cu} + R_{Al}} = 4.77\times10^{-2}\,L$$

(الف) حال با توجه به اینکه $i_{Cu} + i_{Al} = i = 2\,A$ است چنانچه اختلاف دو سیم را V فرض کنیم، خواهیم داشت

$$V = R_{Cu}i_{Cu} = R_{Al}i_{Al} \Rightarrow (8.62\times10^{-2}\,L)i_1 = (0.107)(2 - i_1)$$

$$\Rightarrow 0.81 i_{Cu} = 2 - i_{Cu} \Rightarrow i_{Cu} = 1.1\,A$$

(ب)

$$i_{Al} = 2 - 1.1 = 0.9\,A$$

(پ)

$R_۲ = ۴\times۱۰^۲\,\Omega$

$R_۱ = \frac{\varepsilon}{i} = \frac{۱۲}{۰/۰۰۶} = ۲\times۱۰^۳\,\Omega$

حل:

$A_{Cu} = \pi a^۲(۳/۱۴)(۰/۲۵\times۱۰^{-۳})^۲ = ۱/۹۶\times۱۰^{-۷}\,m^۲$

$A_{Al} = \pi(b^۲ - a^۲) = (۳/۱۴)[(۰/۳۸)^۲ - (۰/۲۵)^۲]\times۱۰^{-۶}$

$= ۲/۵۷\times۱۰^{-۷}\,m^۲$

$R_{Cu} = \rho_{Cu}\frac{L_{Cu}}{A_{Cu}} = (۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{L}{(۱/۹۶\times۱۰^{-۷})} = ۸/۶۲\times۱۰^{-۲}\,L$

$R_{Al} = \rho_{Al}\frac{L_{Al}}{A_{Al}} = (۲/۷۵\times۱۰^{-۸})\frac{L}{(۲/۵۷\times۱۰^{-۷})} = ۰/۱۰۷L$

$R_{eq} = \frac{R_{Cu}R_{Al}}{R_{Cu}+R_{Al}} = ۴/۷۷\times۱۰^{-۲}\,L$

$۶ = ۴/۷۷\times۱۰^{-۲}\,L = ۱۲۵/۸\,m$

$V = R_{Cu}i_{Cu} = R_{Al}i_{Al} \Rightarrow (۸/۶۲\times۱۰^{-۲}\,L)i_۱ = (۰/۱۰۷)(۲ - i_۱)$

$\Rightarrow ۰/۸۱i_{Cu} = ۲ - i_{Cu} \Rightarrow i_{Cu} = ۱/۱A$

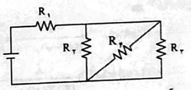
$R_{eq} = \frac{V}{i} = \frac{۱۲}{۲} = ۶\Omega$

و از رابطهٔ $R_{eq} = ۴/۷۷\times۱۰^{-۲}\,L$ که به دست آوردیم، خواهیم داشت:

$۶ = ۴/۷۷\times۱۰^{-۲}\,L = ۱۲۵/۸\,m$

●●۴۸- در شکل ۲۳-۵۳، $R_۱ = ۷/۰۰\Omega$ ، $R_۲ = ۱۲/۰\,\Omega$ ، $R_۳ = ۴/۰۰\,\Omega$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon = ۲۴/۰V$ است. به ازای چه مقدار $R_۴$ آهنگ انتقال انرژی باتری به مقاومت‌ها برابر با (الف) ۶۰/۰ W، (ب) بیشینهٔ آهنگ ممکن P_{max} و (پ) کمینهٔ آهنگ ممکن P_{min} است؟ (پ) P_{max} و (ت) P_{min} چقدرند؟

حل:



برای به دست آوردن مقاومت معادل مدار، ابتدا $R_{۲۳۴}$ را که مقاومت معادل $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ که موازی‌اند رابه دست می‌آوریم.

$\frac{۱}{R_{۲۳۴}} = \frac{۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۳} + \frac{۱}{R_۴} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{R_۴} \Rightarrow R_{۲۳۴} = \frac{۳R_۴}{R_۴+۳}$

و مقاومت معادل مدار برابر است با:

$R_{eq} = R_۱ + R_{۲۳۴} = ۷ + \frac{۳R_۴}{R_۴+۳} = \frac{۱۰R_۴ + ۲۱}{R_۴+۳}$

(الف) حال با توجه به رابطه توان داریم:

$P = \frac{\varepsilon^۲}{R_{eq}} \Rightarrow ۶۰ = \frac{(۲۴)^۲}{R_{eq}} \Rightarrow R_{eq} = ۹/۶\Omega$

در نتیجه می‌توان از رابطه برای R_{eq}، $R_۴$ را به دست آورد.

$۹/۶ = \frac{۱۰R_۴ + ۲۱}{R_۴+۳} \Rightarrow R_۴ = ۱۹/۵\Omega$

(ب) با توجه به اینکه $P \propto \frac{۱}{R_{eq}}$ است لذا باید R_{eq} کمینه باشد و در نتیجه $R_۴$ باید برابر صفر باشد.

(پ) در اینجا باید R_{eq} را بیشینه کنیم یعنی باید $R = \infty$ شود.

(ت) با توجه به قسمت (ب) کمینه مقدار R_{eq} برابر است با ۷Ω ، لذا می‌توان نوشت:

$P_{max} = \frac{\varepsilon^۲}{R_{eq,min}} = \frac{(۲۴)^۲}{۷} = ۸۲/۳\,W$

(ث) برای این حالت دیدیم که باید $R_۴ = \infty$ باشد لذا R_{eq} چنین می‌شود:

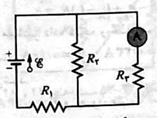
$R_{eq,max} = \frac{۱۰R_۴ + ۲۱}{R_۴+۳} = \left.\frac{۱۰ + \frac{۲۱}{R_۴}}{۱ + \frac{۳}{R_۴}}\right|_{R_۴=\infty} = ۱۰\,\Omega$

در نتیجه

$P_{min} = \frac{\varepsilon^۲}{R_{eq,max}} = \frac{(۲۴)^۲}{۱۰} = ۵۷/۶\,W$

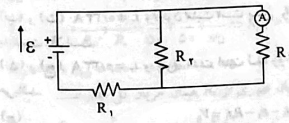
بخش ۲۳-۸ آمپرسنج و ولت‌سنج

●●۴۹- ILW (الف) در شکل ۲۳-۵۶، اگر $\mathscr{E} = ۵/۰V$ (باتری آرمانی)، $R_۱ = ۲/۰\Omega$ ، $R_۲ = ۴/۰\Omega$ و $R_۳ = ۶/۰\Omega$ باشد، آمپرسنج چه عددی را نشان می‌دهد. (ب) حال جای آمپرسنج و باتری را عوض می‌کنیم. نشان دهید که عدد آمپرسنج تغییر نمی‌کند.



شکل ۲۳-۵۶ مسئلهٔ ۴۹

حل:



(الف)

$R_{۲۳} = \frac{R_۲R_۳}{R_۲+R_۳} = \frac{(۴)(۶)}{۴+۶} = ۲/۴\Omega$

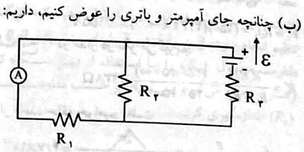
$R_{eq} = R_۱ + R_{۲۳} = ۲ + ۲/۴ = ۴/۴\Omega$

$i = i_۱ = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{۵}{۴/۴} = ۱/۱۴V$

$V_{۲۳} = R_{۲۳}i = (۲/۴)(۱/۱۴) = ۲/۷۴V$

$i_A = i_۳ = \frac{V_{۲۳}}{R_۳} = \frac{۲/۷۴}{۶} = ۰/۴۶A$

(ب) چنانچه جای آمپرمتر و باتری را عوض کنیم، داریم:



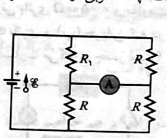
$R_{۱۲} = \frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲} = \frac{(۲)(۴)}{۲+۴} = ۱/۳۳\Omega$

$R_{eq} = R_۳ + R_{۱۲} = ۶ + ۱/۳۳ = ۷/۳۳\Omega$

$i = i_{۱۲} = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{۵}{۷/۳۳} = ۰/۶۸۲A$

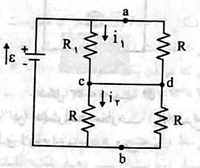
$V_{۱۲} = R_{۱۲}i_{۱۲} = (۱/۳۳)(۰/۶۸۲) = ۰/۹۱V$

۵۰- در شکل ۲۳-۵۷، $R_۱ = ۲/۰۰R$ ، مقاومت آمپرسنج صفر و باتری آرمانی است. چه مضربی از $\mathscr{E}/R$ جریان آمپرسنج را به دست می‌دهد؟



شکل ۲۳-۵۷ مسئلهٔ ۵۰

حل:



آمپرسنج آرمانی است لذا مقاومتی ندارد و می‌توان مقاومت معادل را به صورت زیر به دست آورد:

$R'_۱ = \frac{R_۱R}{R_۱+R} = \frac{۲}{۳}R \qquad R'_۲ = \frac{R}{۲}$

$R_{eq} = R'_۱ + R'_۲ = \frac{۲}{۳}R + \frac{R}{۲} = \frac{۷}{۶}R$

$V_{ac} = \frac{\varepsilon}{\frac{۷}{۶}R}\cdot R'_۱ = \frac{۶\varepsilon}{۷R}\cdot\frac{۲}{۳}R = \frac{۴}{۷}\varepsilon$

و همچنین داریم:

$i_۱ = \frac{V_{ac}}{R_۱} = \frac{\frac{۴}{۷}\varepsilon}{۲R} = \frac{۲\varepsilon}{۷R}$

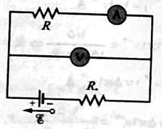
حال می‌توان نوشت:

$V_{cb} = \varepsilon - V_{ac} = \varepsilon - \frac{۴}{۷}\varepsilon = \frac{۳}{۷}\varepsilon$

$i_۲ = \frac{V_{cb}}{R} = \frac{\frac{۳}{۷}\varepsilon}{R} = \frac{۳}{۷}\frac{\varepsilon}{R}$

$i_A = i_۲ - i_۱ = \frac{\varepsilon}{۷R} = ۰/۱۴۳$

●●۵۱- در شکل ۲۳-۵۸، ولت‌سنجی با مقاومت $R_V = ۳۰۰\,\Omega$ و آمپرسنجی با مقاومت $R_A = ۳/۰۰\,\Omega$ برای اندازه‌گیری مقاومت R در مداری که هم‌چنین شامل یک مقاومت $R_۰ = ۱۰۰\,\Omega$ و یک باتری آرمانی با $\mathscr{E} = ۱۲/۰\,V$ است، به کار برده می‌شوند. مقاومت R با رابطهٔ $R = V/i$ داده می‌شود که V اختلاف پتانسیل دو سر R و i مقدار خوانده شده توسط آمپرسنج است. ولت‌سنج عدد V' را نشان می‌دهد که عبارت است از V به علاوهٔ اختلاف پتانسیل دو سر آمپرسنج. بنابراین، نسبت دو مقدار خوانده شده R نیست بلکه *مقاومت ظاهری* $R = V'/i$ است. اگر $R = ۸۵/۰\Omega$ باشد، (الف) مقدار خوانده شده توسط آمپرسنج، (ب) مقدار خوانده شده توسط ولت‌سنج و (پ) R' چقدر است؟ (ت) اگر R_A کم شود، آیا اختلاف میان R' و R افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان می‌ماند؟



شکل ۲۳-۵۸ مسئلهٔ ۵۱

حل: (الف) جریان عبوری از $R_۰$ را $i_۱$ و جریان عبوری از R و آمپرسنج را $i_۲$ می‌نامیم. با استفاده از قاعدهٔ حلقه می‌توان نوشت:

$\varepsilon - R_V(i_۱ - i_۲) - R_۰i_۱ = ۰$

$R_V(i_۱ - i_۲) - Ri_۲ - R_Ai_۲ = ۰$

که با قرار دادن مقادیر عدد و حل همزمان دو معادله خواهیم داشت $i_۱ = ۰/۰۷۱A$ و $i_۲ = i_A = ۰/۰۵۵A$.

(ب) عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد برابر است با

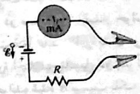
$V' = R_V(i_۱ - i_۲) = (۳۰۰)(۰/۰۱۶) = ۴/۸۵\,V$

(پ) مقاومت ظاهری R' برابر خواهد بود با

$R' = \frac{V'}{i_A} = \frac{۴/۸۵}{۰/۰۵۵} = ۸۸\Omega$

(ت) با توجه به اینکه $R = R' - R_A$ لذا وقتی R_A کاهش یابد اختلاف بین R و R' نیز کاهش می‌یابد و وقتی که $R_A = ۰$ شود، داریم $R' = R$.

●●۵۲- همان‌طور که در شکل ۲۳-۵۹ نشان داده شده است، یک اهم‌سنج ساده با اتصال یک باتری ۱/۵۰ ولتی به طور متوالی با یک مقاومت R و آمپرسنجی که از ۰ تا ۱/۰۰mA را می‌تواند بخواند ساخته شده است. مقاومت R طوری تنظیم می‌شود که هرگاه گیره‌ها به هم وصل شوند، اهم‌سنج با تمام مقیاس ۱/۰۰mA منحرف می‌شود. اندازهٔ مقاومت خارجی که باعث انحراف (الف) ٪۱۰ و (ب) ٪۵۰ و (پ) ٪۹۰ تمام مقیاس می‌شود چقدر است؟ (ت) اگر مقاومت آمپرسنج ۲۰/۰Ω و مقاومت درونی باتری ناچیز باشد، مقدار R چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۹ مسئلهٔ ۵۲

حل: وقتی گیره‌ها را می‌بندیم، داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow ۱\times۱۰^{-۳} = \frac{۱/۵}{R} \Rightarrow R = ۱۵۰۰\,\Omega$$

(الف)

$$i_۱ = (۰/۱)(۱\times۱۰^{-۳}) = ۱\times۱۰^{-۴}\ \text{A}$$

$$i_۱ = \frac{\varepsilon}{R+R_۱} \Rightarrow ۱\times۱۰^{-۴} = \frac{۱/۵}{۱۵۰۰+R_۱} \Rightarrow R_۱ = ۱/۳۵\times۱۰^{۴}\,\Omega$$

(ب)

$$i_۲ = (۰/۵)(۱\times۱۰^{-۳}) = ۵\times۱۰^{-۴}\ \text{A}$$

$$i_۲ = \frac{\varepsilon}{R+R_۲} \Rightarrow ۵\times۱۰^{-۴} = \frac{۱/۵}{۱۵۰۰+R_۲} \Rightarrow R_۲ = ۱۵۰۰\,\Omega$$

(پ)

$$i_۳ = (۰/۹)(۱\times۱۰^{-۳}) = ۹\times۱۰^{-۴}\ \text{A}$$

$$i_۳ = \frac{\varepsilon}{R+R_۳} \Rightarrow ۹\times۱۰^{-۴} = \frac{۱/۵}{۱۵۰۰+R_۳} \Rightarrow R_۳ = ۱۶۶/۷\,\Omega$$

(ت)

$$i = \frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow ۱\times۱۰^{-۳} = \frac{۱/۵}{R+۲۰} \Rightarrow R_۴ = ۱۴۸۰\,\Omega$$

$$i_A = i_۱ = \frac{V_{۱۲}}{R_۱} = \frac{۰/۹۱}{۲} = ۰/۴۵۵\,\text{A}$$

●●۵۳- در شکل ۲۳-۱۴، فرض کنید که $\mathscr{E} = ۳/۰\text{V}$ ، $r = ۱۰۰\,\Omega$ ، $R_۱ = ۲۵۰\,\Omega$ و $R_۲ = ۳۰۰\,\Omega$ باشد. اگر مقاومت R_V ولت‌سنج برابر با ۵/۰kΩ باشد، به هنگام اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل دو سر $R_۱$ چند درصد خطا وجود خواهد داشت؟ از وجود آمپرسنج چشم‌پوشی کنید.

حل: ابتدا فرض می‌کنیم ولت‌سنج در مدار نباشد، اختلاف پتانسیل دو سر Cd را به دست می‌آوریم که آن را $V_۱$ می‌نامیم. از قاعده حلقه می‌توان نوشت:

$$i = i_۱ = \frac{\varepsilon}{R_۱ + R_۲ + ۲} = \frac{۳}{۲۵۰+۳۰۰+۱۰۰} = ۴/۶۲\times۱۰^{-۳}\ \text{A}$$

$$V_۱ = R_۱ i_۱ = (۲۵۰)(۴/۶۲\times۱۰^{-۳}) = ۱/۱۵۵\,\text{V}$$

حال ولت‌سنج را در مدار در نظر می‌گیریم.

$$R'_۱ = \frac{R_۱ R_V}{R_۱ + R_V} = \frac{(۲۵۰)(۵۰۰۰)}{۲۵۰+۵۰۰۰} = ۲۳۸\,\Omega$$

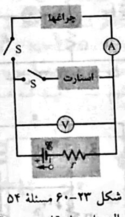
مجدداً از قاعده حلقه خواهیم داشت

$$i' = i'_۱ = \frac{\varepsilon}{R'_۱ + R_۲ + r} = \frac{۳}{۲۳۸+۳۰۰+۱۰۰} = ۴/۷\times۱۰^{-۳}\ \text{A}$$

$$V'_۱ = R'_۱ i'_۱ = (۲۳۸)(۴/۷\times۱۰^{-۳}) = ۱/۱۱۹\,\text{V}$$

$$\frac{\Delta V}{V_۱} = \frac{(۱/۱۵۵-۱/۱۱۹)}{۱/۱۵۵} = ۰/۰۳۱ \quad \text{یا} \quad ٪۳۱$$

●●۵۴- وقتی چراغ‌های اتومبیلی روشن شود، آمپرسنج متوالی با آنها ۱۰/۰A و ولت‌سنج متصل به دو سر آنها ۱۲/۰ V را نشان می‌دهند (شکل ۲۳-۶۰). وقتی استارت زده شود آمپرسنج به عدد ۸/۰۰A کاهش می‌یابد و نور چراغ‌ها اندکی کم می‌شود. اگر مقاومت درونی باتری ۰/۰۵۰۰Ω و مقاومت آمپرسنج ناچیز باشد، (الف) emf باتری و (ب) جریانی که در هنگام روشن شدن چراغ‌ها از استارت می‌گذرد، چقدر است؟



شکل ۲۳-۶۰ مسئلهٔ ۵۴

حل: (الف) در این حالت ابتدا مقاومت R_L چراغ را که در قسمت‌های بعدی لازم داریم، حساب می‌کنیم.

$$i = \frac{V}{R_L} \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱۲}{R_L} \Rightarrow R_L = ۱/۲\,\Omega$$

حال εmf باتری را به دست می‌آوریم:

$$\varepsilon = V + ir = ۱۲ + (۱۰)(۰/۰۵) = ۱۲/۵\,\text{V}$$

(ب) وقتی استارت زده می‌شود، داریم:

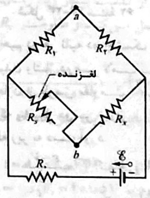
$$V = R_L i \Rightarrow ۱۲ = (۱/۲)(۸) = ۹/۶\,\text{V}$$

$$V = \varepsilon - r_i \Rightarrow ۹/۶ = ۱۲/۵ - (۰/۰۵)i \Rightarrow i = ۵۸\text{A}$$

و جریانی که از استارتر می‌گذرد برابر است با:

$$i_S = ۵۸ - ۸ = ۵۰\,\text{A}$$

●●۵۵- در شکل ۲۳-۶۱، مقدار R_s طوری تنظیم می‌شود که با حرکت دادن لغزنده روی آن پتانسیل نقطه‌های a و b برابر شود. (این شرط را با بستن یک آمپرسنج حساس بین نقطهٔ a و نقطهٔ b می‌توان برقرار کرد؛ اگر این نقطه‌ها در یک پتانسیل باشند، آمپرسنج منحرف نمی‌شود.) نشان دهید که هرگاه این تنظیم انجام شود، این رابطه برقرار است: $R_x = R_s R_۲ / R_۱$. مقاومت مجهول (R_x) را با استفاده از این دستگاه که پل وتستون نامیده می‌شود می‌توان برحسب مقاومت استاندارد (R_s) اندازه‌گیری کرد.



شکل ۲۳-۶۱ مسئله‌های ۵۵

حل: از قاعدهٔ حلقه می‌توان نوشت:

$$(R_۱ + R_۲)i_۱ = (R_S + R_x)i_۲$$

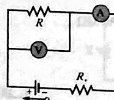
و چون $V_b - V_a = ۰$ است، لذا:

$$R_۱ i_۱ = R_S i_۲$$

با تقسیم کردن دو رابطه بر هم خواهیم داشت:

$$\frac{R_۱ + R_۲}{R_۱} = \frac{R_S + R_x}{R_S} \Rightarrow R_x = \frac{R_۲}{R_۱} R_S$$

●●۵۶- در شکل ۲۳-۶۲ ولت‌سنجی با مقاومت $R_V = ۳۰۰\,\Omega$ و آمپرسنجی با مقاومت $R_A = ۳/۰۰\Omega$ برای اندازه‌گیری مقاومت R در مداری که در آن یک مقاومت $R_۰ = ۱۰۰\,\Omega$ و یک باتری آرمانی با $\mathscr{E} = ۱۲/۰\text{ V}$ نیز وجود دارد، به کار برده می‌شوند. مقاومت R با رابطهٔ $R = V/i$ داده می‌شود که V مقدار نشان داده شده توسط ولت‌سنج و i جریان در مقاومت R است. ولی، آمپرسنج مقدار i را نشان نمی‌دهد بلکه مقدار i' را نشان می‌دهد، که عبارت است از i به علاوهٔ جریانی که از ولت‌سنج می‌گذرد. بنابراین، نسبت دو مقدار خوانده شده R نیست بلکه فقط یک مقاومت *ظاهری* $R' = V/i'$ است. اگر $R = ۸۵/۰\Omega$ باشد، (الف) مقدار نشان داده شدهٔ آمپرسنج، (ب) مقدار نشان داده شدهٔ ولت‌سنج و (پ) R' چقدر است؟ (ت) اگر R_V افزایش یابد، آیا اختلاف میان R' و R افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان می‌ماند؟



شکل ۲۳-۶۲ مسئلهٔ ۵۶

حل: (الف)

$$R'_۱ = \frac{RR_V}{R+R_V} = \frac{(۸۵)(۳۰۰)}{۸۵+۳۰۰} = ۶۶/۲\,\Omega$$

$$R_{eq} = R'_۱ + R_A + R_۰ = ۶۶/۲ + ۳ + ۱۰۰ = ۱۶۹/۲\,\Omega$$

$$i = i_A = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{۱۲}{۱۶۹/۲} = ۷/۱\times۱۰^{-۲}\ \text{A}$$

(ب)

$$V = R'_۱ i = (۶۶/۲)(۷/۱\times۱۰^{-۲}) = ۴/۷\,\text{V}$$

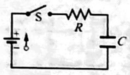
(پ)

$$R' = R'_۱ = ۶۶/۲\,\Omega$$

(ت) اگر R_V افزایش یابد، اختلاف میان R و R' کاهش می‌یابد. به بیان دیگر وقتی $R_V \to \infty$ میل کند، $R' \to R$ میل می‌کند یعنی ولتمتر بیشتر آرمانی عمل می‌کند.

بخش ۲۳-۹ مدارهای RC

●۵۷- کلید S در شکل ۲۳-۶۳ در لحظهٔ $t = ۰$ بسته می‌شود تا خازن خالی با ظرفیت $C = ۱۵/۰\,\mu\text{F}$ از طریق مقاومت $R = ۲۰/۰\,\Omega$ باردار شود. در چه زمانی پتانسیل دو سر خازن برابر با پتانسیل دو سر مقاومت می‌شود؟



شکل ۲۳-۶۳ مسئله‌های ۵۷ و ۹۶

حل:

$$V_C = V_R = \frac{\varepsilon}{۲}$$

$$\tau = RC = (۲۰)(۱۵\times۱۰^{-۶}) = ۳\times۱۰^{-۴}\ \text{s}$$

$$V_c = \varepsilon(۱-e)^{-t/\tau} \Rightarrow \varepsilon/۲ = \varepsilon(۱-e^{-t/\tau})$$

$$e^{-t/\tau} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = Ln\left(\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow t = ۲/۰۸\times۱۰^{-۴}\ \text{s}$$

●۵۸- در یک مدار متوالی RC ، $\mathscr{E} = ۱۲/۰\text{V}$ ، $R = ۱/۴۰\,\text{M}\Omega$ و $C = ۱/۸۰\,\mu\text{F}$ است. (الف) ثابت زمانی را محاسبه کنید. (ب) بیشینهٔ باری را که روی خازن در ضمن باردار شدن ظاهر می‌شود پیدا کنید. (پ) چقدر طول می‌کشد تا خازن تا $۱۶/۰\,\mu\text{C}$ باردار شود؟

حل: (الف) ثابت زمانی خازن برابر است با:

$$\tau = RC = (۱/۴\times۱۰^{-۶})(۱/۸\times۱۰^{-۶}) = ۲/۵۲\text{s}$$

(ب) به ازای $t \to \infty$، بیشینهٔ بار به دست می‌آید.

$$q_{\max} = C\varepsilon = (۱/۸\mu\text{F})(۱۲) = ۲۱/۶\mu\text{C}$$

$$q = q_{\max}(۱-e^{-t/\tau}) \Rightarrow ۱۶ = ۲۱/۶(۱-e^{-t/۲/۵۲})$$

$$\Rightarrow e^{-t/۲/۵۲} = ۰/۲۵۹ \Rightarrow -\frac{t}{۲۵/۲} = Ln(۰/۲۵۹) \Rightarrow t = ۳/۴\text{s}$$

●۵۹- SSM برحسب ثابت زمانی τ ، زمان لازم برای باردار شدن یک خازن بدون بار در یک مدار متوالی RC به اندازهٔ ۹۹/۰٪ بار اولیهٔ آن چقدر است؟

حل: (الف) رابطه باردار شدن خازن در مدار RC عبارت است از:

$$q=q_۰(۱-e^{-t/\tau})$$
$$۰/۹۹q_۰=q_۰(۱-e^{-t/\tau})\Rightarrow e^{-t/\tau}=۰/۰۱\Rightarrow -t/\tau=Ln(۰/۰۱)$$
$$t=۴/۶۰۵\tau$$

●۶۰- خازنی با بار اولیهٔ $q_۰$ از طریق مقاومتی تخلیه می‌شود. برحسب ثابت زمانی τ چقدر زمان نیاز است تا خازن (الف) نخست یک سوم از بار خود و (ب) دو سوم بار خود را از دست بدهد؟

حل: از رابطه تخلیه خازن داریم:

$$q=q_۰e^{-t/\tau}$$

(الف) وقتی یک سوم بار $q_۰$ تخلیه شود، $\frac{۲}{۳}q_۰$ باقی مانده است، لذا:

$$\frac{۲}{۳}q_۰=q_۰e^{-t/\tau}\Rightarrow Ln\left(\frac{۲}{۳}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow t=۰/۴۰۵\tau$$

(ب) وقتی دو سوم بار $q_۰$ تخلیه شود، یک سوم آن باقی می‌ماند.

$$\frac{۱}{۳}q_۰=q_۰e^{-t/\tau}\Rightarrow Ln\left(\frac{۱}{۳}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow t=۱/۰۹\tau$$

●۶۱- ILW مقاومت $۱۵/۰\,k\Omega$ و خازنی به طور متوالی به هم وصل شده‌اند و سپس اختلاف پتانسیل $۱۲/۰V$ به طور ناگهانی به دو سر آنها اعمال می‌شود. اختلاف پتانسیل دو سر خازن در مدت $۱/۳۰\,\mu s$ به $۵/۰۰V$ افزایش می‌یابد. (الف) ثابت زمانی مدار را محاسبه کنید. (ب) ظرفیت خازن را پیدا کنید.

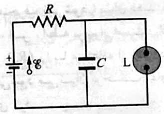
حل: **(الف)**
$$V(t)=\varepsilon(۱-e^{-t/\tau})$$

در $t=۱/۳\,\mu s$ داریم $V=۵V$ لذا داریم:

$$۵=(۱۲)(۱-e^{-۱/۳\mu s/\tau})\Rightarrow \tau=(۱/۳\mu s)\,Ln\left(\frac{۱۲}{۷}\right)=۲/۴۱\mu s$$

(ب)
$$\tau=RC\Rightarrow ۲/۴۱\times۱۰^{-۶}=۱۵\times۱۰^{۳}\,C$$
$$\Rightarrow C=۱/۶\times۱۰^{-۱۰}\ F$$

●●۶۲- شکل ۲۳-۶۴ مدار یک لامپ چشمک‌زن را، مانند لامپی که در محلی در بزرگراه‌ها بسته می‌شود، نشان می‌دهد. لامپ فلورسنت L (با ظرفیت ناچیز) به طور موازی به خازن C در یک مدار RC وصل شده است. فقط هنگامی که اختلاف پتانسیل دو سر لامپ به ولتاژ فروریزش V_L می‌رسد جریانی از لامپ می‌گذرد. در این حال خازن به طور کامل از طریق لامپ تخلیه می‌شود و لامپ برای مدت کوتاهی چشمک می‌زند. در مورد لامپی با ولتاژ فروریزش $V_L=۷۲/۰V$ که به باتری آرمانی $۹۵/۰V$ و خازن $۰/۱۵۰\,\mu F$ وصل شده است، چه مقاومت R برای دو چشمک در ثانیه لازم است.



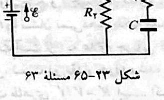
شکل ۲۳-۶۴ مسئلهٔ ۶۲

حل: چون می‌خواهیم در هر ثانیه دو چشمک زده شود لذا زمان هر چشمک و رسیدن ولتاژ دو سر لامپ به ولتاژ شکست $۰/۵s$ می‌شود. خازن از طریق مقاومت تخلیه می‌شود لذا می‌توان زمانی را که پتانسیل دو سر خازن به ولتاژ شکست V_L می‌رسد را از رابطه زیر به دست آورد.

$$V_L=\varepsilon(۱-e^{-t/RC})\Rightarrow e^{-t/RC}=\frac{\varepsilon-V_L}{\varepsilon}$$
$$-\frac{t}{RC}=Ln\frac{\varepsilon-V_L}{\varepsilon}\Rightarrow R=\frac{t}{C\,Ln\left[\varepsilon/(\varepsilon-V_L)\right]}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده $R=۲/۳۵\times۱۰^{۶}\ \Omega$ به دست می‌آید.

●●۶۳- SSM WWW در مدار شکل ۲۳-۶۵، $\mathscr{E}=۱/۲kV$ ، $C=۶/۵\,\mu F$ ، $R_۱=R_۲=R_۳=۰/۷۳M\Omega$. با خازن کاملاً خالی (در $t=۰$) کلید S ناگهان بسته می‌شود. در $t=۰$ (الف) جریان $i_۱$ در مقاومت ۱، (ب) جریان $i_۲$ در مقاومت ۲ و (پ) جریان $i_۳$ در مقاومت ۳ چقدر است؟ در $t=\infty$ (یعنی پس از ثابت‌های زمانی زیاد)، (ت) $i_۱$ ، (ث) $i_۲$ و (ج) $i_۳$ چقدرند؟ اختلاف پتانسیل $V_۲$ در دو سر مقاومت ۱ در (چ) $t=۰$ و (ح) $t=\infty$ چقدر است؟ (خ) $V_۲$ را برحسب t میان این دو زمان حدی رسم کنید.



شکل ۲۳-۶۵ مسئلهٔ ۶۳

حل: در لحظه بسته شدن کلید $t=۰$ خازن بدون بار است و خازن مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند در نتیجه می‌توان نوشت

$$R_{۲۳}=\frac{R_۲R_۳}{R_۲+R_۳}=۰/۳۶۵M\Omega$$
$$R_{eq}=R_۱+R_{۲۳}=۰/۷۳+۰/۳۶۵=۱/۰۹۵M\Omega$$
$$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۱/۲\times۱۰^{۳}}{۱/۰۹۵\times۱۰^{۶}}=۱/۱\times۱۰^{-۳}\ A$$

(الف)
$$i_۱=i=۱/۱\times۱۰^{-۳}\ A$$

(ب)
$$V_۲=R_{۲۳}i=(۰/۳۶۵\times۱۰^{۶})(۱/۱\times۱۰^{-۳})=۴۰۱/۵V$$
$$i_۲=\frac{V_۲}{R_۲}=\frac{۴۰۱/۵}{۰/۷۳\times۱۰^{۶}}=۵/۵\times۱۰^{-۴}\ A$$

(پ) با توجه به اینکه مقاومت‌های $R_۲$ و $R_۳$ یکسان هستند، لذا داریم:

$$i_۳=i_۲=۵/۵\times۱۰^{-۴}\ A$$

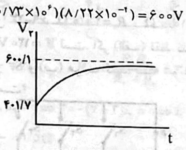
(ت) و (ث) پس از گذشت بسیار زیاد زمان، $t\to\infty$، خازن مانند اتصال باز عمل می‌کند و مقاومت $R_۳$ از مدار حذف می‌شود.

$$i_۱=i_۲=\frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲}=\frac{۱/۲\times۱۰^{۳}}{۲(۰/۷۳\times۱۰^{۶})}=۸/۲۲\times۱۰^{-۴}\ A$$

(ج) همانطور که دیدیم جریان این شاخه صفر است یعنی $i_۳=۰$ است.

(چ) تا (خ) در بخش (الف) و (ب) در $t=۰$ دیدیم که ولتاژ دو سر $R_۲$ برابر بود با $V_۲=۴۰۱/۵V$. در $t\to\infty$

$$V_۲=R_۲i_۲=(۰/۷۳\times۱۰^{۶})(۸/۲۲\times۱۰^{-۴})=۶۰۰V$$



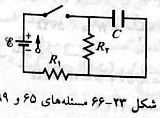
●●۶۴- خازنی با اختلاف پتانسیل اولیهٔ $۱۰۰V$ از طریق مقاومتی وقتی که در لحظهٔ $t=۰$ کلید میان آنها بسته شود شروع به تخلیه می‌کند. در $t=۱۰/۰s$ ، اختلاف پتانسیل دو سر خازن $۱/۰۰V$ می‌شود. (الف) ثابت زمانی مدار چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن در $t=۱۷/۰\ s$ چقدر است؟

حل: (الف) در حالت تخلیه داریم

$$V=V_۰e^{-t/\tau}$$
$$۱=۱۰۰e^{-۱۰/\tau}\Rightarrow Ln(۰/۰۱)=-\frac{۱۰}{\tau}\Rightarrow \tau=۲/۱۷s$$

(ب)
$$V=V_۰e^{-t/\tau}=(۱۰۰)e^{-۱۷/۲/۱۷}=۳/۹۶\times۱۰^{-۲}\ V$$

●●۶۵- GO در شکل ۲۳-۶۶، $R_۱=۱۰/۰\,k\Omega$ ، $R_۲=۱۵/۰\,k\Omega$، $C=۰/۴۰۰\,\mu F$ و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=۲۰/۰\ V$ است. نخست کلید بسته می‌شود و زمانی طولانی می‌گذرد تا حالت پایا برقرار شود. سپس کلید در لحظهٔ $t=۰$ باز می‌شود. جریان در مقاومت ۲ در $t=۴/۰۰ms$ چقدر است؟



شکل ۲۳-۶۶ مسئله‌های ۶۵ و ۹۹

حل: در حالت پایا، خازن مانند اتصال باز عمل می‌کند و داریم:

$$i_۲=i=\frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲}=\frac{۲۰}{(۱۰+۱۵)\times۱۰^{۳}}=۸\times۱۰^{-۴}\ A$$
$$V_C=V_۲=R_۲i_۲=(۱۵\times۱۰^{۳})(۰/۴\times۱۰^{-۶})\Rightarrow V_C=۱۲V$$

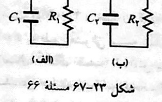
در حالتی که کلید باز می‌شود، در $t=۰$، C و R تشکیل یک حلقه بسته و مدار RC را تشکیل می‌دهند

$$\tau=R_۲C=(۱۵\times۱۰^{۳})(۰/۴\times۱۰^{-۶})=۶\times۱۰^{-۳}\ s$$

برای تخلیه خازن داریم، $i_۰=۸\times۱۰^{-۴}\ A$ است

$$i=i_۰e^{-t/\tau}=(۶\times۱۰^{-۳})e^{-۴/۶}=۴/۱۱\times۱۰^{-۴}\ A$$

●●●۶۶- شکل ۲۳-۶۷ دو مدار با یک خازن باردار را نشان می‌دهد که باید از طریق مقاومتی در حالت بسته بودن کلید تخلیه شود. در شکل ۲۳-۶۷ الف، $R_۱=۲۰/۰\,\Omega$ و $C_۱=۵/۰۰\,\mu F$ است. در شکل ۲۳-۶۷ ب، $R_۲=۱۰/۰\,\Omega$ و $C_۲=۸/۰۰\,\mu F$ است. نسبت بارهای اولیه روی دو خازن $q_{۰۲}/q_{۰۱}=۱/۵۰$ است. در لحظهٔ $t=۰$ هر دو کلید بسته می‌شوند. در چه زمان t بار دو خازن برابر خواهد شد؟



شکل ۲۳-۶۷ مسئلهٔ ۶۶

حل:

$$q_۱=q_{۰۱}e^{-t/\tau_۱}\qquad q_۲=q_{۰۲}e^{-t/\tau_۲}$$
$$\tau_۱=R_۱C_۱=۱\times۱۰^{-۴}\ s\qquad \tau_۲=R_۲C_۲=۸۰\times۱۰^{-۶}\ s$$
$$q_۱=q_۲\Rightarrow q_{۰۱}e^{-t/\tau_۱}=q_{۰۲}e^{-t/\tau_۲}\Rightarrow e^{-t/\tau_۱}=(۱/۵)e^{-t/\tau_۲}$$
$$\Rightarrow e^{\left(\frac{۱}{\tau_۲}-\frac{۱}{\tau_۱}\right)t}=۱/۵\Rightarrow\left(\frac{۱}{۸۰\times۱۰^{-۶}}-\frac{۱}{۱\times۱۰^{-۴}}\right)t=Ln(۱/۵)$$
$$\Rightarrow t=۱/۶۲\times۱۰^{-۴}\ s$$

●●۶۷- اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های یک خازن نشتی $۲/۰\,\mu F$ (بدان معنا که بار از یک صفحه به صفحه دیگر نشت می‌کند) در مدت $۲/۰s$ به یک چهارم مقدار اولیهٔ آن می‌رسد. مقاومت معادل بین صفحه‌های خازن چقدر است؟

حل:

$$V=V_۰e^{-t/RC}\Rightarrow Ln\frac{V}{V_۰}=-\frac{t}{RC}$$
$$\Rightarrow R=-\frac{t}{C\,Ln\frac{V}{V_۰}}=-\frac{۲}{(۲\times۱۰^{-۶})Ln\left(\frac{۱}{۴}\right)}=۷/۲۱\times۱۰^{۵}\ \Omega$$

●●۶۸- خازن $۱\mu F$ با انرژی اولیهٔ ذخیره شدهٔ $۰/۵۰J$ از طریق مقاومت $۱M\Omega$ تخلیه می‌شود. (الف) بار اولیه روی خازن چقدر است؟ (ب) وقتی تخلیه شروع شد جریان در

مقاومت چقدر است؟ عبارتی پیدا کنید که تابعی برحسب زمان بدهد، (پ) اختلاف پتانسیل V_C دو سر خازن، (ت) اختلاف پتانسیل V_R دو سر مقاومت و (ث) آهنگی را که در آن انرژی گرمایی در مقاومت ایجاد می‌شود، پیدا کنید.

حل: (الف) $U=\frac{q^۲}{۲C}\Rightarrow ۰/۵=\frac{q^۲}{۲(۱\times ۱۰^{-۶})}\Rightarrow q=۱\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{C}$

(ب) بار خازن در هنگام تخلیه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$q=q_۰e^{-t/\tau}$$

مشتق این رابطه جریان را به دست می‌دهد.

$$i=\left|\frac{dq}{dt}\right|=\frac{q_۰}{\tau}e^{-t/\tau}$$

در لحظه شروع $t=۰$ است و داریم

$$i_۰=\frac{q_۰}{\tau}=\frac{q_۰}{RC}=\frac{۱\times ۱۰^{-۳}}{(۱\times ۱۰^{۶})(۱\times ۱۰^{-۶})}=۱\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{A}$$

(پ) $q=۱\times ۱۰^{-۳}\,e^{-t/\tau}\Rightarrow V_C=\frac{q}{C}e^{-t/\tau}\Rightarrow V_C=۱۰۰۰e^{-t}$

(ت) $V_R=Ri=(۱\times ۱۰^{۶})(۱\times ۱۰^{-۳}\,e^{-t})=۱۰۰۰e^{-t}$

(ث) $P=Ri^۲=(۱\times ۱۰^{۶})(۱\times ۱۰^{-۳}\,e^{-t})^۲=e^{-۲t}$

●●●۶۹- مقاومت $۳/۰۰\mathrm{M\Omega}$ و خازن $۱/۰۰\mu\mathrm{F}$ با باتری آرمانی $\varepsilon=۴/۰۰\mathrm{V}$ به طور متوالی بسته شده‌اند. در زمان $۱/۰۰\mathrm{s}$ پس از اتصال، آهنگ (الف) افزایش بار خازن (ب) انرژی ذخیره شده در خازن، (پ) اتلاف انرژی گرمایی به وجود آمده در مقاومت و (ت) انرژی تولید شده توسط باتری، چقدر است؟

حل: (الف)

$$\tau=RC=(۳\times ۱۰^{۶})(۱\times ۱۰^{-۶})=۳\mathrm{s}$$

$$q=C\varepsilon(۱-e^{-t/\tau})$$

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{C\varepsilon}{\tau}e^{-t/\tau}=\frac{(۱\times ۱۰^{-۶})(۴)}{۳}e^{-۱/۳}=۹/۵۵\times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{A}$$

(ب) $U=\frac{q^۲}{۲C}\qquad \frac{dU}{dt}=\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}=\frac{C\varepsilon(۱-e^{-t/\tau})}{C}i$

$$\frac{dU}{dt}=(۴)(۱-e^{-۱/۳})(۹/۵۵\times ۱۰^{-۷})=۱/۰۸\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{W}$$

(پ) آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت $P=Ri^۲$ است. در اینجا $i=۹/۵۵\times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{A}$ است، لذا داریم:

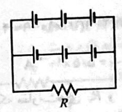
$$P=(۳\times ۱۰^{۶})(۹/۵۵\times ۱۰^{-۷})^۲=۲/۷۴\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{W}$$

(ت) آهنگ انتقال انرژی از باتری از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P=\varepsilon i=(۴)(۹/۵۵\times ۱۰^{-۷})=۳/۸۲\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{W}$$

مسئله‌های اضافی

۷۰- emf هر یک از شش باتری واقعی شکل ۲۳-۶۸ برابر با $۲۰\mathrm{V}$ و مقاومت آن $۴/۰\Omega$ است. (الف) چه جریانی از مقاومت (خارجی) $R=۴/۰\Omega$ می‌گذرد؟ (ب) اختلاف پتانسیل دو سر هر باتری چقدر است؟ (پ) توان هر باتری چقدر است؟ (ت) با چه آهنگی هر باتری انرژی را به انرژی گرمایی درونی تبدیل می‌کند؟



شکل ۲۳-۶۸ مسئلهٔ ۷۰

حل: (الف) با توجه به تقارن مدار، جریان در هر شاخهٔ شامل باتری‌ها یکسان‌اند و اگر آن را i_b بنامیم جریانی که از مقاومت R می‌گذرد برابر $i=۲i_b$ است. برای حلقهٔ پایینی داریم:

$$-۳ri_b+۳\varepsilon-Ri=۰$$

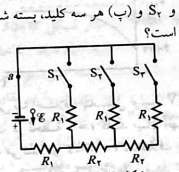
$$-۳(۴)\left(\frac{i}{۲}\right)-۳(۲۰)-۴i=۰\qquad i=۶$$

$$i=۶\mathrm{A}\quad\Rightarrow\quad i_b=۳\mathrm{A}$$

(ب) $V=\varepsilon-i_br=۲۰-(۳)(۴)=۸\mathrm{V}$

(پ) $P=\varepsilon i_b=(۲۰)(۳)=۶۰\mathrm{W}$

۷۱- در شکل ۲۳-۶۹، $R_۱=۲۰/۰\ \Omega$ ، $R_۲=۱۰/۰\ \Omega$ و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=۱۲۰\ \mathrm{V}$ است. اگر (الف) فقط کلید $S_۱$ ، (ب) فقط کلید $S_۱$ و $S_۲$ و (پ) هر سه کلید، بسته شوند، جریان در نقطهٔ a چقدر است؟



شکل ۲۳-۶۹ مسئلهٔ ۷۱

حل: (الف) وقتی فقط کلید $S_۱$ بسته شود، داریم:

$$i=\frac{\varepsilon}{۲R_۱}=\frac{۱۲۰}{۲(۲۰)}=۳\mathrm{A}$$

(ب) وقتی کلید $S_۱$ و $S_۲$ بسته شوند، در حلقهٔ دوم داریم:

$$R_{۱۲}=R_۱+R_۲=(۲۰+۱۰)=۳۰\Omega$$

حال مقاومت معادل حلقه اول و دوم را به دست می‌آوریم

$$R'=\frac{R_۱R_{۱۲}}{R_۱+R_{۱۲}}+R_۱=۱۲+۲۰=۳۲$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R'}=\frac{۱۲۰}{۳۲}=۳/۷۵\mathrm{A}$$

(پ) بالاخره وقتی هر سه کلید بسته شوند، با کمی دقت می‌بینیم که مقاومت حلقهٔ سوم $R'_۳=۳۰\Omega$، مقاومت حلقه دوم $R'_۲=۳۰\Omega$ و مقاومت شاخه دوم $R_۱=۲۰\Omega$.

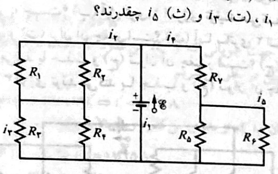
$$\frac{۱}{R'}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow R'=۸/۵۷\Omega$$

مقاومت معادل کل مدار برابر است

$$R_{eq}=R'+R_۱=۸/۵۷+۲۰=۲۸/۷۵\Omega$$

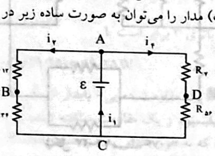
$$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۱۲۰}{۲۸/۷۵}=۴/۲\mathrm{A}$$

۷۲- در شکل ۲۲-۷۴، emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=۳۰/۰\mathrm{V}$ و مقاومتها عبارت‌اند از $R_۱=R_۲=۱۴\Omega$ ، $R_۳=R_۴=R_۵=۶/۰\Omega$ ، $R_۶=۲/۰\Omega$ و $R_۷=۱/۵\Omega$. جریانهای (الف) $i_۲$ ، (ب) $i_۴$ ، (پ) $i_۱$ ، (ت) $i_۳$ و (ث) $i_۵$ چقدرند؟



شکل ۲۳-۷۰ مسئلهٔ ۷۲

حل: (الف) مدار را می‌توان به صورت ساده زیر در نظر گرفت:



$$R_{۱۲}=\frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲}=۷\Omega\qquad R_{۳۴}=\frac{R_۳R_۴}{R_۳+R_۴}=۳\Omega$$

$$\varepsilon-(R_{۱۲}+R_{۳۴})i_۲=۰\Rightarrow ۳۰-(۷+۳)i_۲=۰\Rightarrow i_۲=۳\mathrm{A}$$

(ب) $R_{۵۶}=\frac{R_۵R_۶}{R_۵+R_۶}=۱/۵\Omega$

$$\varepsilon-(R_۷+R_{۵۶})i_۴=۰\Rightarrow ۳۰-(۱/۵+۱/۵)i_۴=۰\Rightarrow i_۴=۱۰\mathrm{A}$$

(پ) با استفاده از قانون انشعاب در نقطه A می‌توان نوشت

$$i_۱=i_۲+i_۴=۳+۱۰=۱۳\mathrm{A}$$

(ت) $V_{۳۴}=R_{۳۴}i_۲=(۳)(۳)=۹\mathrm{V}$

$$i_۳=\frac{V_{۳۴}}{R_۳}=\frac{۹}{۶}=۱/۵\mathrm{A}$$

(ث) $V_{۵۶}=R_{۵۶}i_۴=(۱/۵)(۱۰)=۱۵\mathrm{V}$

$$i_۵=\frac{V_{۵۶}}{R_۶}=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵\mathrm{A}$$

۷۳- SSM سیم‌های A و B با طول‌های مساوی $۴۰/۰\mathrm{m}$ و قطرهای مساوی $۲/۶۰\ \mathrm{mm}$ به طور متوالی به هم وصل شده‌اند. اختلاف پتانسیل $۶۰/۰\ \mathrm{V}$ به دو انتهای سیم مرکب اعمال می‌شود. مقاومت سیم‌ها عبارت‌اند از $R_A=۰/۱۲۷\Omega$ ، $R_B=۰/۷۲۹\Omega$. در مورد سیم A ، (الف) بزرگی J چگالی جریان و (ب) اختلاف پتانسیل V ، چقدر است؟ (پ) جنس سیم A از چه ماده‌ای است (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید)؟ در مورد سیم B ، (ت) J و (ث) V چقدر است؟ (ج) جنس سیم B از چه ماده‌ای است؟

حل: (الف)

$$A=\pi r^۲=\pi\left(\frac{D}{۲}\right)^۲=(۳/۱۴)(۱/۳\times ۱۰^{-۳})^۲=۵/۳۱\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{m}^۲$$

$$R_{eq}=R_A+R_B=۰/۱۲۷+۰/۷۲۹=۰/۸۵۶\Omega$$

$$i=i_A=i_B=\frac{V}{R_{eq}}=\frac{۶۰}{۰/۸۵۶}=۷۰/۱\mathrm{A}$$

$$j_A=\frac{i}{A}=\frac{۷۰/۱}{۵/۳۱\times ۱۰^{-۶}}=۱/۳۲\times ۱۰^{۷}\ \mathrm{A/m^۲}$$

(ب) $V_A=R_Ai=(۰/۱۲۷)(۷۰/۱)=۸/۹\mathrm{V}$

(پ) $R_A=\rho_A\frac{L}{A}\Rightarrow ۰/۱۲۷=\rho_A\frac{۴۰}{۵/۳۱\times ۱۰^{-۶}}$

$$\Rightarrow\rho_A=۱/۶۹\times ۱۰^{-۸}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$$

بنابراین جنس سیم A از مس است.

(ت) $j_B=j_A=۱/۳۲\times ۱۰^{۷}\ \mathrm{A/m^۲}$.

(ث) V_B برابر است با

$$V_B=V-V_A=۶۰-۸/۹=۵۱/۱\mathrm{V}$$

یا می‌توان گفت

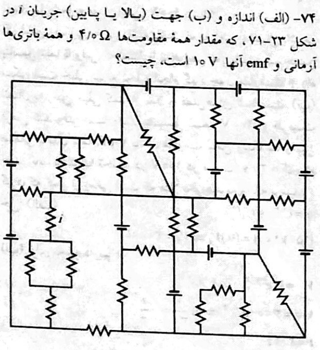
$$V_B=R_Bi=(۰/۷۲۹)(۷۰/۱)=۵۱/۱\mathrm{V}$$

(ج) $R_B=\rho_B\frac{L}{A}\Rightarrow ۰/۷۲۹=\rho_B\frac{۴۰}{۵/۳\times ۱۰^{-۶}}$

$$\rho_B=۹/۶۸\times ۱۰^{-۸}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$$

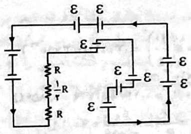
بنابراین جنس سیم B از آهن است.

۷۴- (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان i در شکل ۲۳-۷۱، که مقدار همهٔ مقاومت‌ها $۴/۰\Omega$ و همهٔ باتری‌ها آرمانی و emf آنها $۱۰\mathrm{V}$ است، چیست؟



شکل ۲۳-۷۱ مسئلهٔ ۷۴

حل: (الف) و (ب) در اینجا می‌توان بدون ساده کردن مدار که بسیار وقت‌گیر است و برای به دست آوردن جریان در یک مقاومت معین از قانون حلقه استفاده کرد. مسیر بسته‌ای مطابق مدار زیر را در نظر می‌گیریم که فقط شامل باتری و آن مقاومت باشد.



$$-\varepsilon+\varepsilon-2/5Ri+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon-\varepsilon+\varepsilon-\varepsilon=0$$

$$4\varepsilon=2/5Ri \quad \Rightarrow \quad i=4A$$

و چون جواب مثبت جهت انتخابی جریان صحیح است.

۷۵- [redacted] فرض کنید در حالی که روی صندلی نشسته‌اید، جدایی بار بین لباس‌هایتان و صندلی شما را در پتانسیل ۲۰۰V قرار دهد و ظرفیت خازن بین شما و صندلی ۱۵۰pF باشد. وقتی می‌ایستید، جدایی بین بدن شما و صندلی زیاد می‌شود و ظرفیت تا ۱۰pF کاهش می‌یابد. (الف) حالا پتانسیل بدن شما چقدر است؟ وقتی بار از طریق بدن و کفش‌ها خارج می‌شود (شما خازنی هستید که از طریق یک مقاومت تخلیه انجام می‌گیرد) پتانسیل در طول زمان کاهش می‌یابد. فرض کنید که مقاومت در طول این راه ۳۰۰ GΩ باشد. اگر وقتی پتانسیل شما بیشتر از ۱۰۰V است و قطعه‌ای الکتریکی را لمس کنید، به آن قطعه آسیب خواهد رسید. (ب) چقدر باید منتظر بمانید تا پتانسیل شما به مقدار ایمن ۱۰۰V برسد؟

اگر لباس رسانایی به تن داشته باشید که به زمین متصل باشد، پتانسیل شما تا وقتی که ایستاده‌اید افزایش نمی‌یابد؛ هم‌چنین ممکن است خیلی سریع تخلیه انجام گیرد چون مقاومت از راه اتصال به زمین خیلی کمتر از بدن و کفش‌های شماست. (پ) فرض کنید وقتی ایستاده‌اید پتانسیل شما ۱۴۰۰V و ظرفیت صندلی با بدن شما ۱۰pF باشد. مقاومت لباس رسانا تا زمین چقدر باید باشد تا تخلیه در ۱۰۰V در مدت ۰/۳۰ s انجام گیرد، که کمتر از زمانی است که مثلاً بخواهید به رایانه برسید.

حل: (الف)

$$q=C_1V_1=C_2V_2$$

$$(150)(200)=(10)V_2 \Rightarrow V_2=3000V$$

(ب) برای تخلیه داریم

$$V_C=V_0e^{-t/\tau}$$

$$100=3000e^{-t/\tau} \Rightarrow \ln\frac{1}{30}=-\frac{t}{\tau}$$

$$t=3/4\tau$$

$$\tau=RC=(300\times10^9)(10\times10^{-12})=3S$$

$$t=(3/4)(3)=10/2\,s$$

(پ)

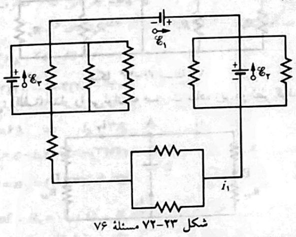
$$V_C=V_0e^{-t/\tau} \Rightarrow 100=1400\,e^{-t/\tau}$$

$$\ln\frac{1}{14}=-\frac{0/3}{\tau} \Rightarrow \tau=0/114S$$

$$\tau=RC \Rightarrow 0/114=10\times10^{-12}\,R$$

$$R=1/14\times10^{10}\,\Omega$$

۷۶- GO در شکل ۲۳-۷۲، emf باتری‌های آرمانی $\varepsilon_1=20/0\,V$ و $\mathscr{E}_2=10/0\,V$ و $\mathscr{E}_3=5/00\,V$ و اندازه هر یک از مقاومت‌ها $2/00\,\Omega$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان i_1 چیست؟ (پ) آیا باتری ۱ انرژی تولید می‌کند یا جذب، و (ت) توان آن چقدر است؟ (ث) آیا باتری ۲ انرژی تولید می‌کند یا جذب و (ج) توان آن چقدر است؟ (چ) آیا باتری ۳ انرژی تولید می‌کند یا جذب و (ح) توان آن چقدر است؟



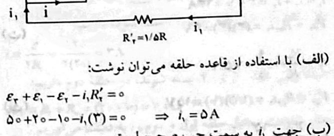
شکل ۲۳-۷۲ مسئلهٔ ۷۶

حل: مدار را به صورت ساده‌تر در می‌آوریم.

$$R'_1=0/4R=0/8\Omega$$

$$R'_2=1/5R=3\Omega$$

$$R'_3=0/5R=1\Omega$$



(الف) با استفاده از قاعده حلقه می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_3+\varepsilon_1-\varepsilon_2-i_1R'_2=0$$

$$50+20-10-i_1(3)=0 \qquad \Rightarrow \quad i_1=5A$$

(ب) جهت i_1 به سمت چپ صحیح است.

(پ) چون جریان i_1 از باتری ۱ روبه‌جلو است یعنی وارد قطب منفی آن می‌شود این باتری در حال کار و انرژی دادن به مدار است.

(ت) توان باتری ۱ برابر است با

$$P_1=\varepsilon i=(20)(5)=100\,W$$

(ث) جریان i'_2 از R'_2 می‌گذرد

$$\varepsilon_2=R'_2i'_2 \Rightarrow 10=(1)i'_2 \Rightarrow i'_2=10\,A$$

جهت این جریان در R'_2 روبه‌پایین است پس جریان i_2 که از باتری ε_2 می‌گذرد رو به بالا است و مقدار آن $i_2=i'_2-i_1=5A$ است و چون به قطب منفی وارد می‌شود این باتری در حال انرژی دادن است.

(ج) توان باتری ۲ برابر است با

$$P_2=\varepsilon_2i_2=(10)(5)=50\,W$$

(چ) جهت جریانی که از R'_1 می‌گذرد i'_1 نامیده می‌شود و رو به پایین در نظر می‌گیریم

$$\varepsilon_3=R'_1i'_1 \Rightarrow 5=0/8i'_1 \Rightarrow i'_1=6/25\,A$$

جریان i_3 که از باتری می‌گذرد روبه‌بالا و برابر است با:

$$i_3=i'_1+i_1=6/25+5=11/25\,A$$

این باتری در حل جذب انرژی از مدار و در حال پر شدن است.

(ح) توان باتری ۳ برابر است با

$$P_3=\varepsilon_3i_3=(5)(11/25)=56/25\,W$$

۷۷- SSM یک مقاومت دمایی- پایدار از یک مقاومت ساخته شده از سیلیسیوم و یک مقاومت ساخته شده از آهن تشکیل شده است که به طور متوالی به هم متصل‌اند. اگر در گسترهٔ دمایی وسیعی حول ۲۰°C مقاومت کل ۱۰۰۰Ω مورد نیاز باشد، (الف) مقاومت سیلیسیومی و (ب) مقاومت آهنی چقدر است؟ (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید.)

حل: (الف) سیلیسیوم نیمه‌هادی است لذا با افزایش دما، مقاومت آن کاهش می‌یابد. سیلیسیوم را با شاخص پایین ۱ و آهن را با شاخص پایین ۲ مشخص می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که مقاومت آهن با افزایش دما، افزایش می‌یابد. دو مقاومت به صورت متوالی بسته شده‌اند، لذا می‌توان نوشت

$$R=R_1(1-\alpha_1\Delta T)+R_2(1+\alpha_2\Delta T)$$

$$R=R_1+R_2+(R_2\alpha_2-R_1\alpha_1)\Delta T$$

چون می‌خواهیم با تغییر دما، مقاومت ثابت بماند لذا خواهیم داشت

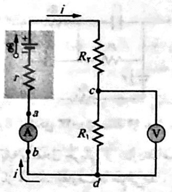
$$R_2\alpha_2-R_1\alpha_1=0 \Rightarrow R_2=R_1\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$R_2=R_1\frac{6/5\times10^{-3}}{70\times10^{-3}} \Rightarrow R_2=\frac{6/5}{70}R_1$$

ضمناً داریم $R_1+R_2=1000$ لذا با حل همزمان این دو معادله داریم:

$$R_1=915\Omega \qquad R_2=85\Omega$$

۷۸- در شکل ۲۳-۱۴، فرض کنید که $\mathscr{E}=5/0\,V$، $r=2/0\Omega$، $R_1=5/0\Omega$ و $R_2=4/0\Omega$ است. اگر مقاومت آمپرسنج R_A برابر $0/10\,\Omega$ باشد، در اندازه‌گیری جریان چه درصد خطایی وارد می‌شود؟ فرض کنید که ولت سنج وجود ندارد.



حل: جریان در مدار برابر است با:

$$i=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2+r+r_A}=\frac{5}{5+4+2+r_A}=\frac{5}{11+r_A}$$

بدون آمپرسنج جریان برابر $i_1=\frac{5}{11}=0/455\,A$ و با آمپرسنج برابر $i_2=\frac{5}{11/1}=0/450\,A$ است. لذا درصد خطا چنین است

$$\frac{\Delta i}{i_1}=\frac{0/455-0/450}{0/455}=0/011 \qquad \text{یا} \qquad \%1/1$$

۷۹- SSM خازن C که در ابتدا بدون بار است توسط وسیله‌ای با emf ثابت که به طور متوالی توسط مقاومت R به آن وصل شده است کاملاً باردار می‌شود. (الف) نشان دهید که انرژی ذخیره شدهٔ نهایی در خازن نصف انرژی تولید شده توسط منبع emf است. (ب) با انتگرال‌گیری مستقیم از i^2R روی زمان باردارشدن، نشان دهید که انرژی گرمایی مصرف شده به وسیلهٔ مقاومت نیز نصف انرژی تولید شده توسط منبع emf است.

حل: (الف) برای شارژ بار روی خازن داریم

$$q=\varepsilon Ce^{-t/RC}$$

انرژی ذخیره شده در خازن برابر است با

$$U_C=\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}=\frac{\varepsilon^2C^2}{2C}=\frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

انرژی‌ای که emf در dt تولید می‌کند برابر است با:

$$dU_{emf}=Pdt=\varepsilon i\,dt=\varepsilon\left(\frac{dq}{dt}\right)dt=\varepsilon\left[\frac{\varepsilon C}{RC}\right]e^{-t/RC}dt$$

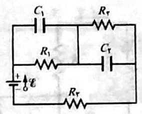
$$U_{emf}=\frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-t/RC}dt=\frac{\varepsilon^2}{R}RC=C\varepsilon^2=2U_C$$

(ب)

$$dU_R=Pdt=Ri^2dt=R\left(\frac{\varepsilon^2}{C}e^{-2t/RC}\right)dt$$

$$U_R=\frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC}dt=\frac{\varepsilon^2}{R}\frac{RC}{2}=\frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

۸۰- در شکل ۲۳-۷۳، $R_1=5/00\,\Omega$، $R_2=10/0\,\Omega$، $R_3=15/0\,\Omega$، $C_1=5/00\,\mu F$، $C_2=10/0\,\mu F$ و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=20/0\,V$ است. با فرض اینکه مدار در حالت پایا باشد، انرژی کل ذخیره شده در دو خازن چقدر است؟



شکل ۲۳-۸۰ مسئلهٔ ۹۴

حل: در حالت پایا و تعادل جریانی از خازن‌ها عبور نمی‌کنـد و خازن‌ها اتصال باز هستند. مقاومت‌ها متوالی‌اند و از قاعده حلقه داریم

$$i=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2+R_3}=\frac{20}{5+10+15}=0.67\,\text{A}$$

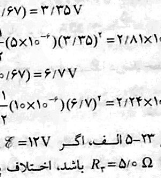
$$V_1=R_1 i=(5)(0.67)=3.35\,\text{V}$$

$$U_1=\frac{1}{2}C_1V_1^2=\frac{1}{2}(5\times10^{-6})(3.35)^2=2.81\times10^{-5}\,\text{J}$$

$$V_2=R_2 i=(10)(0.67)=6.7\,\text{V}$$

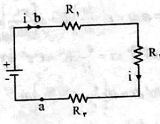
$$U_2=\frac{1}{2}C_2V_2^2=\frac{1}{2}(10\times10^{-6})(6.7)^2=2.24\times10^{-4}\,\text{J}$$

۸۱- در شـکل ۲۳-۵ الـف، اگـر $\mathcal{E}=12\,\text{V}$ ، $R_1=3.0\,\Omega$ ، $R_2=4.0\,\Omega$ و $R_3=5.0\,\Omega$ باشد، اختلاف پتانسیل دو سر R_2 را پیدا کنید.



شکل ۲۳-۷۳ مسئلهٔ ۸۰

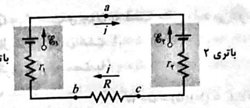
حل:



اختلاف پتانسیل در سر V_2 برابر است با

$$V_2=iR_2=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2+R_3}R_2=\frac{12}{3+4+5}(4)=4\,\text{V}$$

۸۲- در شکل ۲۳-۸ الف، با در نظر گرفتن مسیری که شامل R ، r_1 و $\mathcal{E}_1$ است، اختلاف پتانسیل میان a و c را محاسبه کنید.



حل:

با استفاده از قاعده حلقه ابتدا جریان i را به دست می‌آوریم.

$$-\varepsilon_2-r_2i-Ri-r_1i+\varepsilon_1=0$$

$$i=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R+r_1+r_2}=\frac{4.4-2.1}{5.5+1.8+2.3}=0.24\,\text{A}$$

$$V_a-V_c=\varepsilon_2+r_2i=2.1+(2.3)(0.24)=2.53\,\text{V}$$

۸۳- کنترل کنندهٔ روی یک اسباب بازی الکترونیکی دارای یـک مقاومت متغیر است که به دو سر یک خـازن $0.220\,\mu\text{F}$ وصـل شده است. خـازن تـا $5.00\,\text{V}$ بـاردار و سـپس از طریـق یـک مقاومت تخلیه می‌شود. زمان کـاهش اخـتلاف پتانـسیل دو سـر صفحه‌ها بـه $0.800\,\text{V}$ بـا سـاعت داخـل وسـیله انـدازه‌گیـری می‌شود. اگر گسترهٔ زمان تخلیه که به طور مؤثر می‌توانـد تغییـر داده شود از $10.0\,\mu\text{s}$ تا $6.00\,\text{ms}$ باشد، (الف) مقـدار پـایین و (ب) مقدار بالای گسترهٔ مقاومت باید چقدر باشد؟

حل: (الف) برای تخلیـه خـازن داریـم $V=\varepsilon e^{-t/RC}$ و بـرای $t_{\min}=10\,\mu\text{s}$ داریم

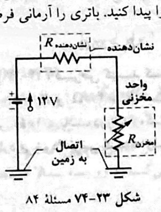
$$e^{-t/RC}=\frac{V}{\varepsilon}\qquad -\frac{t}{RC}=Ln\frac{V}{\varepsilon}\qquad R=\frac{t}{C\,Ln\left(\frac{\varepsilon}{V}\right)}$$

$$R_{\min}=\frac{10\times10^{-6}}{(0.22\times10^{-6})\,Ln(5/0.8)}=24.8\,\Omega$$

(ب) به ازای $t_{\max}=6\,\text{ms}$

$$R_{\max}=\frac{6\times10^{-3}}{(0.22\times10^{-6})\,Ln(5/.8)}=1.49\times10^{4}\,\Omega$$

۸۴- طرحوار دستگاه اندازه‌گیری بنزین یـک اتومبیـل در شـکل ۲۳-۶۹ نشان داده شده است. مقاومـت دسـتگاه نـشان دهنـده (خط‌چین) $10\,\Omega$ است. واحد مخزنـی شـناوری اسـت کـه بـه مقاومتی وصل شده است که مقاومت آن به طور خطی برحسب حجم بنزین تغییر می‌کند. وقتی مخزن خـالی اسـت مقـدار ایـن مقاومت $140\,\Omega$ و وقتی مخزن پر است مقدار آن $20\,\Omega$ اسـت. وقتی که مخزن (الف) خالی و (ب) نیمه خالی و (پ) پر است، جریان در مدار را پیدا کنید. باتری را آرمانی فرض کنید.



شکل ۲۳-۷۴ مسئلهٔ ۸۴

حل: (الف) مخزن خالی است، داریـم $R_{\text{مخزن}}=140\,\Omega$. جریـان در مدار برابر است با

$$i=\frac{12}{10+140}=0.08\,\text{A}$$

(ب) با توجه به اینکه رابطهٔ مقاومت مخـزن و حجـم گازوئیـل خطی است. وقتی مخزن نیمه پـر اسـت مقاومـت مخـزن برابـر $R_{\text{مخزن}}=\frac{1}{2}(20+140)=80\,\Omega$ است.
بنابراین جریان در مدار برابر است با:

$$i=\frac{12}{10+80}=0.13\,\text{A}$$

(پ) هنگامی که مخزن پر است $R_{\text{مخزن}}=20\,\Omega$ بود و داریم:

$$i=\frac{12}{10+20}=0.40\,\text{A}$$

۸۵- SSM استارت اتومبیلی خیلی آهسته می‌چرخد و تعمیرکار باید دربارهٔ تعویض آن، کابل یا باتری تصمیم بگیـرد. از کتابچـهٔ راهنمای اتومبیل معلوم می‌شود که مقاومـت درونـی بـاتری ۱۲ ولتی نباید بیـشتر از $0.020\,\Omega$ ، مقاومـت اسـتارت نبایـد بیـشتر از $0.200\,\Omega$ و مقاومت کابـل نبایـد بیـشتر از $0.040\,\Omega$ باشـد. تعمیرکار موتـور را روشـن مـی‌کنـد و ولتـاژ دو سـر بـاتری را $11.4\,\text{V}$، ولتـاژ دو سـر کابـل را $3.0\,\text{V}$ و جریـان را $50\,\text{A}$ اندازه‌گیری می‌کند. کدام قطعه معیوب است؟

حل: ولتاژ دو سر باتری برابر است با

$$V=\varepsilon-ir\Rightarrow 11.4=12-(50)r\Rightarrow$$

$$r=0.012\,\Omega<0.02\,\Omega$$

پس باتری سالم است. مقاومت کابل برابر است با

$$R=\frac{30}{50}=0.06\,\Omega>0.04$$

پس کابل معیوب است و باید تعویض شود.

۸۶- دو مقاومت R_1 و R_2 می‌توانند به طور متوالی یا به طور موازی به باتری با emf برابر بـا $\mathcal{E}$ وصـل شـوند. مـی‌خـواهیم آهنگ مصرف انـرژی ترکیـب مـوازی پـنج برابـر مقـدار آن در ترکیب متوالی باشد. اگر $R_1=100\,\Omega$ باشد، (الـف) کمتـرین و (ب) بیشترین دو مقدار R_2 بایـد چقـدر باشـد تـا ایـن آهنـگ مصرف حاصل شود؟

حل: وقتی اتصال دو مقاومت R_1 و R_2 متـوالی باشـند آهنـگ اتلاف انـرژی برابـر اسـت بـا $P_S=\frac{\varepsilon^2}{R_{eq}}=\frac{\varepsilon^2}{R_1+R_2}$ و وقتـی اتصال موازی اسـت داریـم $P_P=\frac{\varepsilon^2(R_1+R_2)}{R_1R_2}$. بـا توجـه بـه صورت مسئله داریم $P_P=5P_S$ ، لذا خواهیم داشت:

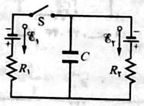
$$\frac{\varepsilon^2(R_1+R_2)}{R_1R_2}=5\frac{\varepsilon^2}{R_1+R_2}\Rightarrow(R_1+R_2)^2=5R_1R_2$$

با توجه به اینکه $R_1=100\,\Omega$ است لذا خواهیم داشت

$$\Rightarrow R_2^2-300R_2+10^4=0$$

که با حل این معادله درجه دوم خواهیم داشت:
(الف) کمترین مقدار R_2 برابر است با $38.2\,\Omega$.
(ب) بیشترین مقدار R_2 برابر است با $261.8\,\Omega$.

۸۷- مـدار شـکل ۲۳-۷۵ یـک خـازن، دو بـاتری آرمـانی، دو مقاومت و یک کلید را نشان می‌دهد. در آغاز S به مدت طولانی باز است. اگر سپس این کلید به مدت طولانی بسته شود، تغییـر در بار خازن چقدر مـی‌شـود؟ فـرض کنیـد کـه $C=3.0\,\text{V}$ ، $R_1=0.20\,\Omega$ و $R_2=0.40\,\Omega$.



شکل ۲۳-۷۵ مسئلهٔ ۸۷

حل: وقتی کلید S به مدت طـولانی بـاز اسـت بـار q_1 توسـط باتری ε_2 در خازن انباشته می‌شود

$$q_i=\varepsilon_2C=(3)(10)=30\,\mu\text{C}$$

وقتی کلید S بسته می‌شود بار خازن پس از رسـیدن بـه حالـت تعادل موجب می‌شود که خازن اتصال باز شـود در ایـن حالـت داریم

$$i=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_1+R_2}=\frac{3-1}{0.2+0.4}=3.33\,\text{A}$$

با داشتن i می‌توان اختلاف پتانسیل دو سر بـاتری را بـه دسـت آورد.

$$V=\varepsilon_2-iR_2=3-(3.33)(0.4)=1.67\,\text{V}$$

بار نهایی روی خازن برابر است با $q_f=CV$ لذا تغییر بار روی خازن برابر خواهد بود:

$$\Delta q=q_f-q_i=C(V-\varepsilon_2)=(10)(1.67-3)=-13.33\,\mu\text{C}$$

۸۸- در شـکل ۲۳-۴۱، $R_1=10.0\,\Omega$ ، $R_2=20.0\,\Omega$ و emf باتری‌های آرمانی $\mathcal{E}_1=20.0\,\text{V}$ و $\mathcal{E}_2=50.0\,\text{V}$ است. بـه ازای چه مقدار از R_3 هیچ جریانی از باتری ۱ نمی‌گذرد؟

حل: با استفاده از قاعده انشعاب $i_1=i_2+i_3$ و از قاعـده حلقـه داریم

$$20-i_1R_1-i_3R_3=0$$

$$20-i_1R_1-i_2R_2=0$$

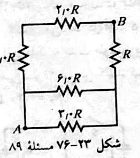
چون جریانی از باتری نمی‌گذرد لذا $i_1=0$ و در نتیجـه $i_2=i_3$ است. با حـل همزمـان دو معادلـه فـوق بـه ازای $R_1=10\,\Omega$ و $R_2=20\,\Omega$ به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$i_1=\frac{40-3R_3}{20+3R_3}$$

که چون $i_1=0$ باید صفر باشد، خواهیم داشت:

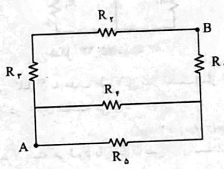
$$R_3=\frac{40}{3}=13.3\,\Omega$$

۸۹- در شکل ۲۳-۷۶، $R = 10\,\Omega$ است. مقاومت معادل میان نقطه‌های A و B چقدر است؟ (*راهنمایی*: اگر در ابتدا فرض کنیم که نقطه‌های A و B به یک باتری وصل شده‌اند این مدار ساده‌تر خواهد شد.)



شکل ۲۳-۷۶ مسئلهٔ ۸۹

حل:



$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{(6R)(3R)}{6R + 3R} = 2R$$

$$R_{145} = R_1 + R_{45} = R + 2R = 3R$$

$$R_{23} = (2R) + (4R) = 6R$$

$$R_{eq} = \frac{R_{23} R_{145}}{R_{23} + R_{145}} = \frac{(6R)(3R)}{6R + 3R} = 2R$$

$$R_{eq} = 2(10) = 20\,\Omega$$

۹۰- (الف) در شکل ۲۳-۴ الف نشان دهید که آهنگ مصرف انرژی در R به صورت انرژی گرمایی، در $R = r$ بیشینه است. (ب) نشان دهید که این توان بیشینه برابر است با $P = \mathscr{E}^2/4r$.

حل: (الف) آهنگ اتلاف انرژی گرمایی در R با $P = Ri^2$ داده می‌شود که $i = \frac{\varepsilon}{R+r}$ است.

$$P = R\left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2$$

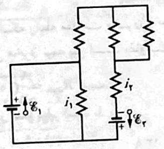
برای بیشینه P باید $\frac{dP}{dR} = 0$ باشد.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\varepsilon^2 (R+r)^2 - 2(R+r)\varepsilon^2 R}{(R+r)^4} = 0 \Rightarrow R = r$$

(ب) به ازای $R = r$، اتلاف در مقاومت R برابر است:

$$P = R\left(\frac{\varepsilon}{r+r}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$

۹۱- در شکل ۲۳-۷۷، emf های باتریهای آرمانی $\varepsilon_1 = 12.0\,V$ و $\mathscr{E}_2 = 4.00\,V$ و اندازهٔ هر یک از مقاومت‌ها $4.00\,\Omega$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) i_1 چیست؟ (پ) اندازه و (ت) جهت i_2 چیست؟ (ث) آیا باتری ۱ انرژی تولید می‌کند یا جذب؟ و (ج) آهنگ انتقال انرژی آن چقدر است؟ (چ) آیا باتری ۲ انرژی تولید می‌کند یا جذب و (ح) آهنگ انتقال انرژی آن چقدر است؟



شکل ۲۳-۷۷ مسئلهٔ ۹۱

حل: (الف) برای حلقهٔ سمت چپ داریم

$$i_1 = \frac{\varepsilon_1}{R} = \frac{12}{4} = 3\,A$$

(ب) جهت i_1 روبه‌پایین است

(پ) قاعده حلقه را برای حلقه وسط می‌نویسیم

$$\varepsilon_2 + i_1 R - i_2 R + \frac{i_2}{2} R - i_2 R = 0$$

که با قرار دادن مقادیر معلوم، $i_2 = 1.6\,A$ به دست می‌آید. (ت) جواب مثبت است پس جهت روبه‌پایین انتخابی برای i_2 صحیح است.

(ث) باتری ۱ تولید انرژی می‌کند چون جریان عبوری در باتری روبه‌جلو است.

(ج) با استفاده از قانون انشعاب داریم:

$$i_3 = i_1 + i_2 = 3 + 1.6 = 4.6\,A$$

در نتیجه آهنگ انتقال انرژی برابر است با

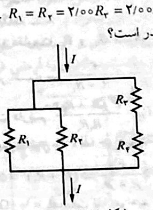
$$P = \varepsilon i = (12)(4.6) = 55.2\,W$$

(چ) چون جریان عبوری در باتری ۲ روبه‌جلو است لذا این توان را تولید می‌کند.

(ح) آهنگ انتقال انرژی برابر است با:

$$P = (4) i_2 = 6.4\,W$$

۹۲- شکل ۲۳-۷۸ قسمتی از مداری را نشان می‌دهد که جریان $I = 6.00\,A$ از آن می‌گذرد. مقاومت‌ها عبارت‌اند از $R_1 = R_2 = 2.00 R_3 = 2.00 R_4 = 4.00\,\Omega$. جریان i_1 در مقاومت ۱ چقدر است؟



شکل ۲۳-۷۸ مسئلهٔ ۹۲

حل: (الف) با استفاده از مقاومت معادل مسئله را حل می‌کنیم

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 4\,\Omega$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2\,\Omega$$

$$R_{eq} = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = \frac{(4)(2)}{4+2} = \frac{4}{3}\,\Omega$$

$$V_1 = V = R_{eq} i = \left(\frac{4}{3}\right)(6) = 8\,V$$

$$i_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{8}{4} = 2\,A$$

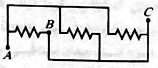
۹۳- در یک مقاومت $0.10\,\Omega$ که به یک باتری $1.5\,V$ متصل است، انرژی گرمایی با آهنگ $10\,W$ ظاهر می‌شود. (الف) چه اختلاف پتانسیلی باید در دوسر مقاومت برقرار باشد؟ (ب) مقاومت داخلی باتری باید چقدر باشد؟

حل: (الف) $P = Ri^2 \Rightarrow 10 = (0.1) i^2 \Rightarrow i = 10\,A$

$$V = Ri = (0.1)(10) = 1\,V$$

(ب) $i = \frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow 10 = \frac{1.5}{0.1 + r} \Rightarrow r = 0.05\,\Omega$

۹۴- شکل ۲۳-۷۹ سه مقاومت 20.0 اهمی را نشان می‌دهد. مقاومت معادل میان نقطه‌های (الف) A و B، (ب) A و C و (پ) B و C را پیدا کنید. (*راهنمایی*: تصور کنید که به هر زوج نقطهٔ داده شده یک باتری متصل است.)



شکل ۲۳-۷۹ مسئلهٔ ۹۴

حل: (الف) مقاومت معادل بین A و B برابر است با (سه مقاومت موازی داریم)

$$R_{eq} = \frac{20}{3} = 6.67\,\Omega$$

(ب) مقاومت معادل بین A و C برابر است با (سه مقاومت موازی داریم)

$$R_{eq} = \frac{20}{3} = 6.67\,\Omega$$

(پ) مقاومت معادل بین B و C صفر است چون B و C با یک سیم رسانا متصل شده‌اند.

۹۵- یک خط قدرت $120\,V$ با یک فیوز $15A$ حفاظت می‌شود. بیشینهٔ تعداد لامپ ۵۰۰ واتی که به طور همزمان و به طور موازی در این خط می‌توانند کار کنند بدون آنکه فیوز بر اثر اضافه جریان بسوزد، چقدر است؟

حل: مقاومت مجاز برابر است با $R = \frac{120}{15} = 8\,\Omega$ و مقاومت هر لامپ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{V^2}{r} \Rightarrow 500 = \frac{(120)^2}{r} \Rightarrow r = 28.8\,\Omega$$

لامپ‌ها به صورت موازی بسته شده‌اند لذا داریم:

$$R = \frac{r}{N} \Rightarrow 8 = \frac{28.8}{N} \Rightarrow N = 3.6$$

به این ترتیب باید ۳ عدد قرار داد چون ۴ لامپ فیوز را می‌سوزاند.

۹۶- شکل ۲۳-۶۳ یک باتری آرمانی را با $\mathscr{E} = 12\,V$، مقاومت $R = 4.0\,\Omega$ و خازن بدون بار $C = 4.0\,\mu F$ نشان می‌دهد. پس از بسته شدن کلید، جریان عبوری از مقاومت، پس از باردار شدن خازن به اندازهٔ $8.0\,\mu C$ چقدر است؟

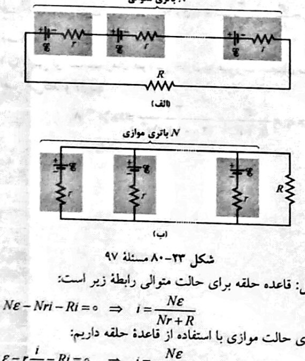
حل: در حالت شارژ خازن در مدار RC داریم

$$q = \varepsilon C(1 - e^{-t/RC})$$

$$8 = (12)(4)(1 - e^{-t/RC}) \Rightarrow e^{-t/RC} = 0.833$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} = \frac{12}{4}(0.833) \Rightarrow i = 2.5\,A$$

۹۷- فرض کنید دسته‌ای شامل N باتری مشابه با emf برابر با $\mathscr{E}$ و مقاومت درونی r، همه به طور متوالی (شکل ۲۳-۸۰ الف) یا همه به طور موازی (شکل ۲۳-۸۰ ب) بسته شده و به دو سر مقاومت R متصل‌اند. نشان دهید که اگر $R = r$ باشد هر دو آرایش در R جریان یکسانی به دست می‌دهند.



شکل ۲۳-۸۰ مسئلهٔ ۹۷

حل: قاعده حلقه برای حالت متوالی رابطهٔ زیر است:

$$N\varepsilon - Nri - Ri = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{N\varepsilon}{Nr + R}$$

برای حالت موازی با استفاده از قاعدهٔ حلقه داریم:

$$\varepsilon - r\frac{i}{N} - Ri = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{N\varepsilon}{r + NR}$$

حل از مقایسه این دو نتیجه مشاهده می‌کنیم که به ازای $r = R$ آنها برابر می‌شوند.

۹۸- SSM در شکل ۲۳-۴۸، $R_1 = R_2 = 10.0\,\Omega$ و emf باتری آرمانی $\mathscr{E} = 12.0\,V$ است. (الف) چه مقداری از R_3 آهنگ تولید انرژی در باتری را بیشینه می‌کند و (ب) این آهنگ بیشینه چقدر است؟

حل:

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 R_3} = \frac{20 R_3 + 100}{R_3 + 10}$$

$$P=\frac{V^2}{R_{eq}}=\frac{V^2(R_3+10)}{20R_3+100}=\frac{144(R_3+10)}{20(R_3+5)}$$

برای اینکه P بیشینه باشد:

$$\frac{dP}{dR_3}=0\Rightarrow\frac{dP}{dR_3}=-\frac{36}{(R_3+5)^2}$$

(الف) چون شیب منفی به دست آمده نتیجه می‌گیریم که تابع همواره نزولی است. پس هرچه R_3 بیشتر باشد P کمتر است و برعکس هرچه R۳ کمتر باشد P بیشتر است. لذا به ازای $R_3=0$، P بیشترین مقدار را دارد.

(ب) P به ازای $R_3=0$ برابر است با

$$P=\frac{144(0+10)}{20(0+5)}=14/4\ \mathrm{W}$$

۹۹- در شکل ۲۳-۶۶، emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=30\ \mathrm{V}$، مقاومت‌ها $R_1=20\ \mathrm{k\Omega}$ و $R_2=10\ \mathrm{k\Omega}$ و خازن بدون بار است. وقتی در لحظهٔ $t=0$ کلید بسته شود، جریان در (الف) مقاومت ۱ و (ب) مقاومت ۲ چقدر است؟ (پ) پس از زمان طولانی جریان در مقاومت ۲ چقدر است؟

حل: (الف) درست پس از بسته شدن کلید خازن به صورت اتصال کوتاه عمل می‌کند و اختلاف پتانسیل دو سر R_2 برابر صفر است، لذا داریم:

$$i_{01}=\frac{\varepsilon}{R_1}=\frac{30}{20\times10^3}=1/5\times10^{-3}\ \mathrm{A}$$

(ب) $i_{02}=0$ است.

(پ) پس از گذشت زمان طولانی خازن به صورت اتصال باز عمل می‌کند و داریم:

$$i_1=i_2=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}=\frac{30}{(20+10)\times10^3}=1\times10^{-3}\ \mathrm{A}$$